

# 確率と統計(0)

## 「確率不等式(第5章)」

- 担当教員: 杉山 将 (計算工学専攻)
- 居室: W8E-505
- 電子メール: [sugi@cs.titech.ac.jp](mailto:sugi@cs.titech.ac.jp)
- 授業のウェブサイト:  
<http://sugiyama-www.cs.titech.ac.jp/~sugi/>

# チェビシエフの不等式

183

- チェビシエフの不等式(Chebyshev's inequality)

$$P(|X - E(X)| \geq k) \leq \frac{V(X)}{k^2}$$

- 確率分布の具体的な形は分からないが期待値と分散が分かるとき, チェビシエフの不等式によって確率の上限が計算できる
- チェビシエフの不等式はいかなる確率変数に対しても成立する!

# チェビシエフの不等式 (証明)

184

$$P(|X - E(X)| \geq k) \leq \frac{V(X)}{k^2}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (X - E(X))^2 f(X) dX \\ &\geq \int_I (X - E(X))^2 f(X) dX \\ &\geq k^2 \int_I f(X) dX \\ &= k^2 P(|X - E(X)| \geq k) \end{aligned}$$

$$I = \{X : |X - E(X)| \geq k\}$$

# チェビシエフの不等式の応用例<sup>185</sup>

- ある試験の点数の平均が60点, 分散が30であった
- $60 \pm 10$ 点の範囲に入っている人の割合は

$$P(|X - 60| \geq 10) \leq \frac{30}{100}$$

より

$$\begin{aligned} P(|X - 60| < 10) &= 1 - P(|X - 60| \geq 10) \\ &\geq 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10} \end{aligned}$$

- 70%以上の人がある範囲に含まれる

# その他の確率不等式

- マルコフの不等式(Markov's inequality):

$$P(X \geq a) \leq \frac{1}{a} E[X] \quad \text{for any } a > 0$$

- イェンセンの不等式(Jensen's inequality):

$$E[h(X)] \geq h(E[X])$$

$h(x)$ : 凸関数

- ヘルダーの不等式(Hölder inequality):

$$E[|XY|] \leq (E[|X|^p])^{1/p} (E[|Y|^q])^{1/q}$$

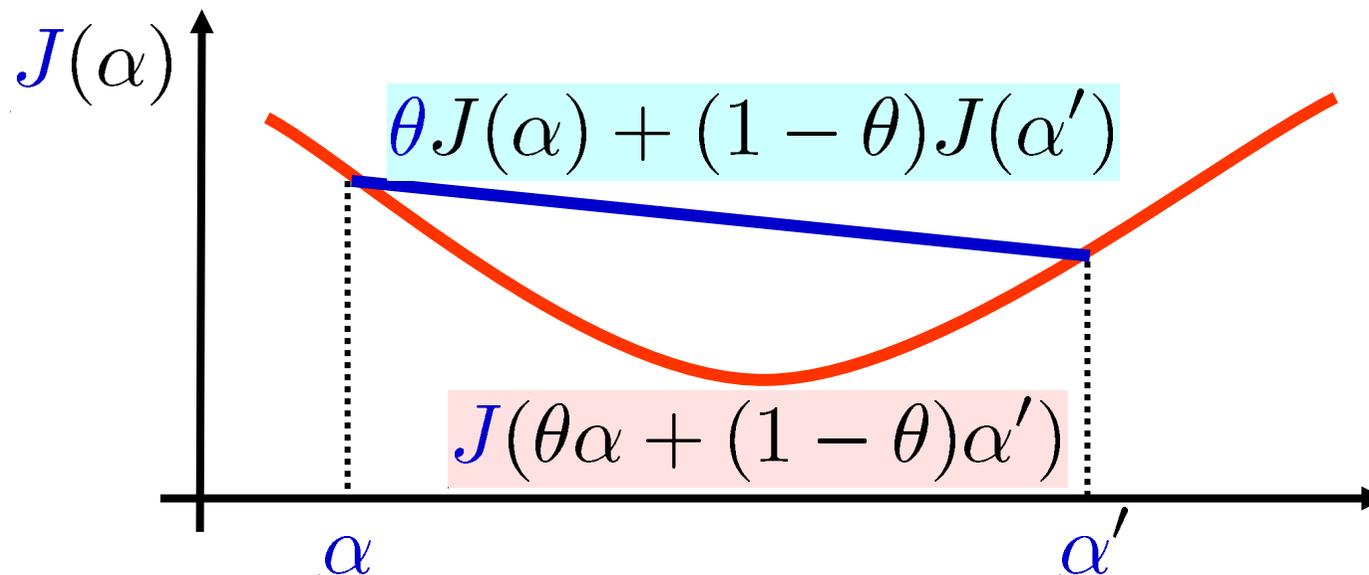
for any  $p, q > 0$  such that  $1/p + 1/q = 1$

特に  $p = q = 2$  の場合をシュバルツの不等式 (Schwarz' inequality) とよぶ

# 凸関数

- 任意の  $\alpha, \alpha'$  と任意の  $\theta \in (0, 1)$  に対して以下の式が成り立つとき,  $J(\alpha)$  は**凸関数 (convex function)**であるという

$$J(\theta\alpha + (1 - \theta)\alpha') \leq \theta J(\alpha) + (1 - \theta)J(\alpha')$$



# 小レポート

- 授業で扱っているトピック，授業の進め方，講義内容の難易度，講義資料，宿題などについて意見を述べ，この授業を評価せよ。
  - 分かりにくかったところがある場合は，スライドの**何ページのどの部分がどのように**分かりにくかったのか具体的に記述すること。
  - 悪いところは**どうすれば改善するかも**考えよ。
  - 良いところ，このまま続けるべきところも述べよ。
  - その他，授業内容の改善に役立つ意見を述べよ。
- このレポートは他のレポートと同様，成績評価に加味するので，真剣に書くこと。