

確率と統計(0)

「確率分布の例(第6章)」

- 担当教員: 杉山 将 (計算工学専攻)
- 居室: W8E-505
- 電子メール: sugi@cs.titech.ac.jp
- 授業のウェブサイト:
<http://sugiyama-www.cs.titech.ac.jp/~sugi/>

主な連続型の確率分布

143

- 正規分布
- 一様分布
- ガンマ分布
- 指数分布
- ベータ分布
- コーシー分布

正規分布

144

■ 正規分布(normal distribution)

$$\sigma > 0$$

$$\mu \in (-\infty, \infty)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \text{ for } x \in (-\infty, \infty)$$

■ ガウス分布(Gaussian distribution)とも呼ぶ

■ 独立な確率変数の平均の極限は正規分布に従う

正規分布 (続き)

■ $f(x)$ が確率密度関数であることの証明

- $f(x) \geq 0$ は明らか
- 以下,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

を証明する. そのためにまず, 積分における
変数変換の概念を復習する.

積分における変数変換(一変数)¹⁴⁶

$$\int_{\mathcal{X}} f(x) dx = \int_{\mathcal{R}} f(g(r)) \frac{dg}{dr} dr \quad \begin{array}{l} x = g(r) \\ \mathcal{X} = g(\mathcal{R}) \end{array}$$

■ **例:** $f(x) = x$, $\mathcal{X} = [2, 3]$ のとき, 左辺は

$$\int_{\mathcal{X}} f(x) dx = \int_2^3 x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_2^3 = \frac{5}{2}$$

次に $g(r) = r^2$ に対して右辺を計算する.

$$\mathcal{R} = [\sqrt{2}, \sqrt{3}], \quad f(g(r)) = r^2, \quad \frac{dg}{dr} = 2r \quad \text{なので,}$$

$$\int_{\mathcal{R}} f(g(r)) \frac{dg}{dr} dr = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} r^2 \cdot 2r dr = \left[\frac{1}{2} r^4 \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \frac{5}{2}$$

積分における変数変換(二変数)¹⁴⁷

$$\int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} f(x, y) dy dx = \int_{\mathcal{R}} \int_{\Theta} f(g(r, \theta), h(r, \theta)) |J| d\theta dr$$

$$\begin{array}{ll} x = g(r, \theta) & \mathcal{X} = g(\mathcal{R}, \Theta) \\ y = h(r, \theta) & \mathcal{Y} = h(\mathcal{R}, \Theta) \end{array} \quad J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

J : ヤコビアン行列(Jacobian matrix)

$|J|$: ヤコビアン行列の行列式(ヤコビアン)

- 三変数以上の場合も同様に計算できる

積分における変数変換(例) 148

■ 例: $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ を変数変換を用いて計算する.

即ち, $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = [-\infty, \infty]$

■ $g(r, \theta) = r \cos \theta, h(r, \theta) = r \sin \theta$ とおけば,

$\mathcal{R} = [0, \infty], \Theta = [0, 2\pi], J = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}, |J| = r$ なので,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}} \int_{\Theta} f(g(r, \theta), h(r, \theta)) |J| d\theta dr &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} = \pi \end{aligned}$$

ガウス積分の公式

- 前頁の計算より, 次のガウス積分の公式を得る.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

- 証明:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx &= \sqrt{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right\}} \\ &= \sqrt{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right\}} \\ &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy} \\ &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

正規分布 (続き)

■ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ for $x \in (-\infty, \infty)$

が $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ を満たすことを示す.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-r^2) dr \\ &= 1\end{aligned}$$

$$r = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$$

$$dx = \sqrt{2}\sigma dr$$

正規分布の性質

151

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \text{ for } x \in (-\infty, \infty)$$

■ 期待値:

$$E(X) = \mu$$

■ 分散:

$$V(X) = \sigma^2$$

■ 積率母関数:

$$M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

■ 期待値 μ , 分散 σ^2 の正規分布を $N(\mu, \sigma^2)$ で表す

証明

■ 積率母関数:

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + tx\right) dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \{x^2 - 2(\mu + \sigma^2 t)x + \mu^2\}\right) dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\{x - (\mu + \sigma^2 t)\}^2}{2\sigma^2} + \mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) dx \\
 &= \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t\right) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\{x - (\mu + \sigma^2 t)\}^2}{2\sigma^2}\right) dx}_{\text{平均 } \mu + \sigma^2 t, \text{ 分散 } \sigma^2 \text{ の} \\ &\quad \text{正規分布の確率密度関数の積分 (= 1)}} \\
 &= \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)
 \end{aligned}$$

証明(続き)

153

$$M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

$$M'_X(t) = (\mu + \sigma^2 t)M_X(t)$$

$$M''_X(t) = \sigma^2 M_X(t) + (\mu + \sigma^2 t)M'_X(t)$$

$$M_X(0) = 1, \quad M'_X(0) = \mu, \quad M''_X(0) = \sigma^2 + \mu^2$$

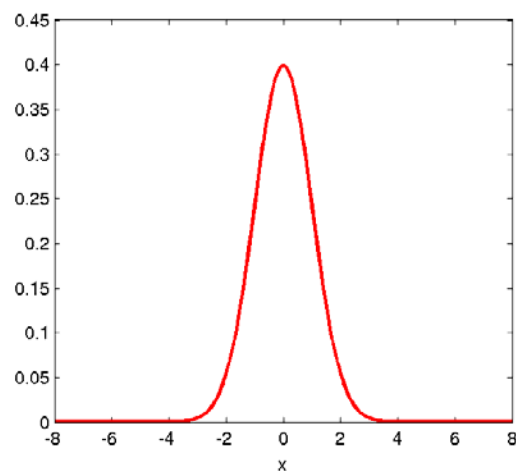
$$E[X] = M'_X(0) = \mu$$

$$V(X) = M''_X(0) - M'_X(0)^2 = \sigma^2$$

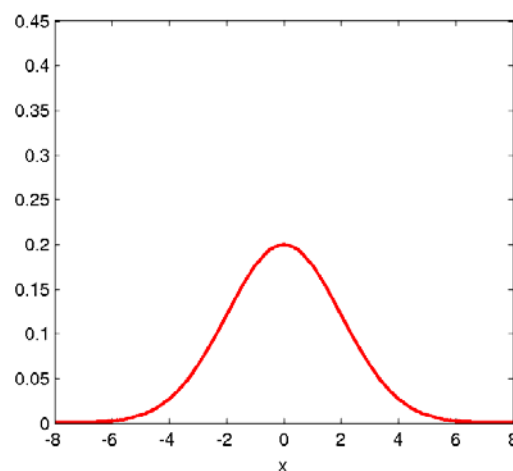
正規分布の例

154

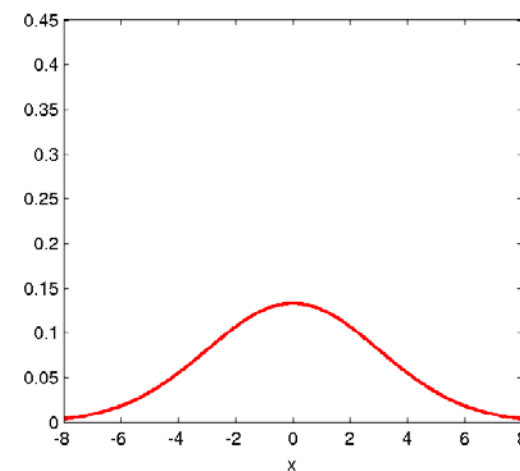
$$\mu = 0$$



$$\sigma = 1$$



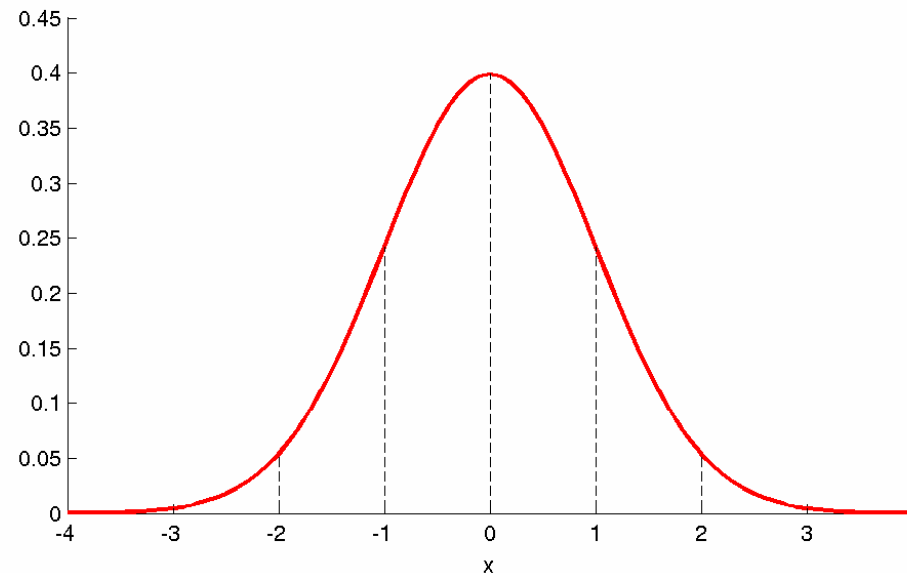
$$\sigma = 2$$



$$\sigma = 3$$

正規分布の性質(続き)

155



- 標準正規分布に対して、
 - $[-1, 1]$ の範囲に約68.27%
 - $[-2, 2]$ の範囲に約95.45%
 - $[-3, 3]$ の範囲に約99.73%

正規分布の性質(続き)

156

- 一般に $E(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$ のとき, X の線形変換 $Y = aX + b$ に対して

$$E(Y) = a\mu + b, \quad V(Y) = a^2\sigma^2$$

- 更に X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき, Y も正規分布に従う(証明は宿題)

$$Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

- 従って, 標準化変数 $Z = (X - \mu)/\sigma$ も正規分布に従う

$$Z \sim N(0, 1)$$

- $N(0, 1)$ を標準正規分布(standard normal distribution)と呼ぶ

1. X の確率密度関数が $f(x)$, $X = t(Y)$ のとき , Y の確率密度関数 $g(y)$ が次式で与えられることを示せ

$$g(y) = f(t(y)) \frac{dt}{dy}$$

ヒント: 確率密度関数の積分は1

2. X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき , その線形変換 $Y = aX + b$ は正規分布

$$N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

に従うことを証明せよ

ヒント: Y の確率密度関数を調べよ