確率と統計(0)
「積率と積率母関数(第5章)」

- 担当教員： 杉山 将 (計算工学専攻)
- 居室： W8E-505
- 電子メール: sugi@cs.titech.ac.jp

- 授業のウェブサイト：
  http://sugiyama-www.cs.titech.ac.jp/~sugi/

確率変数のばらつきの指標

- 期待値は確率変数を代表する重要な指標の一つである
- 期待値とともによく用いられる指標が確率変数の散らばり具合を表す**分散**(variance)である
- 確率変数 X の分散を $V(X)$ で表し

$$V(X) = E\{(X - E[X])^2\}$$

で定義する
- 次式の方が計算しやすいこともある

$$\begin{aligned} V(X) &= E\{X^2 - 2XE[X] + (E[X])^2\} \\ &= E[X^2] - (E[X])^2 \end{aligned}$$

分散演算の性質

- 定数の分散はゼロ

$$V(c) = 0$$

- 定数を足したものの分散は，もとの分散と等しい

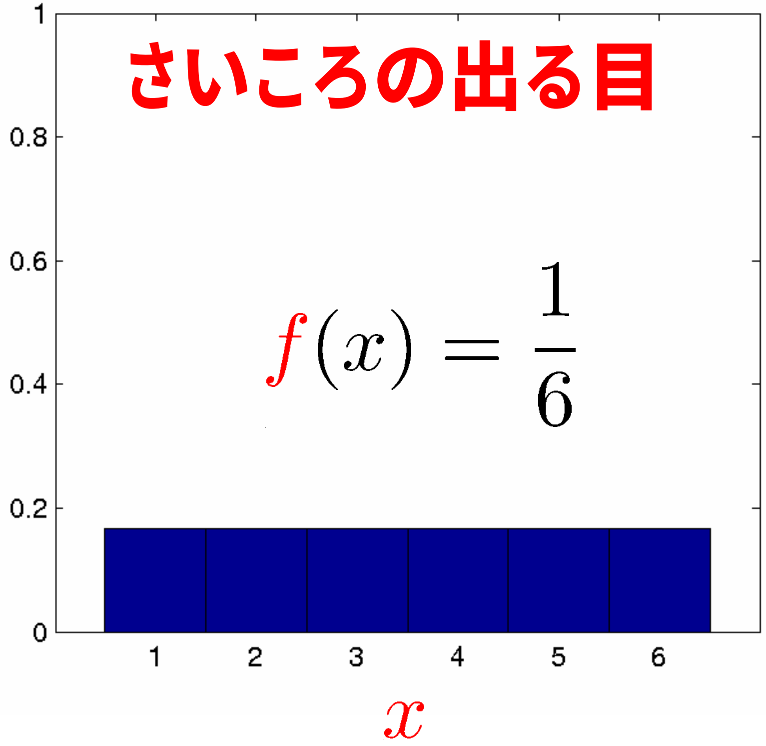
$$V(X + c) = V(X)$$

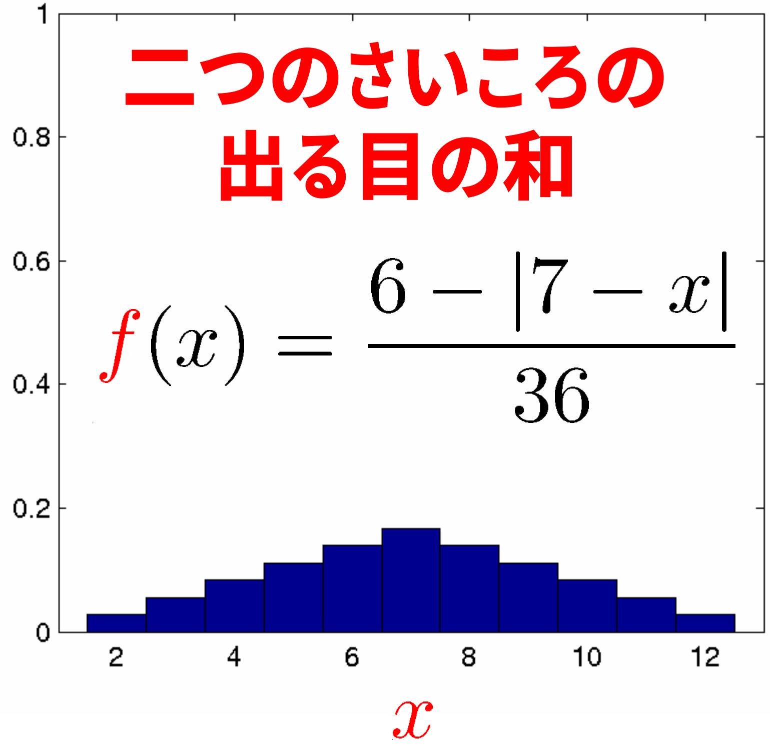
- 定数倍の分散は，もとの分散に定数の2乗をかけたものと等しい

$$V(cX) = c^2 V(X)$$

- 証明は宿題！

例





- それぞれの分布の期待値と分散を求めよ

期待値：7／2
分散：35／12

期待値：7
分散：35／6

標準偏差と標準化

- 分散の平方根を**標準偏差**(standard deviation)という

$$D(X) = \sqrt{V(X)}$$

- 分散の値を σ^2で, 標準偏差の値を σ で表わすことが多い
- **標準化**(standardization)

任意の確率変数 X に対して

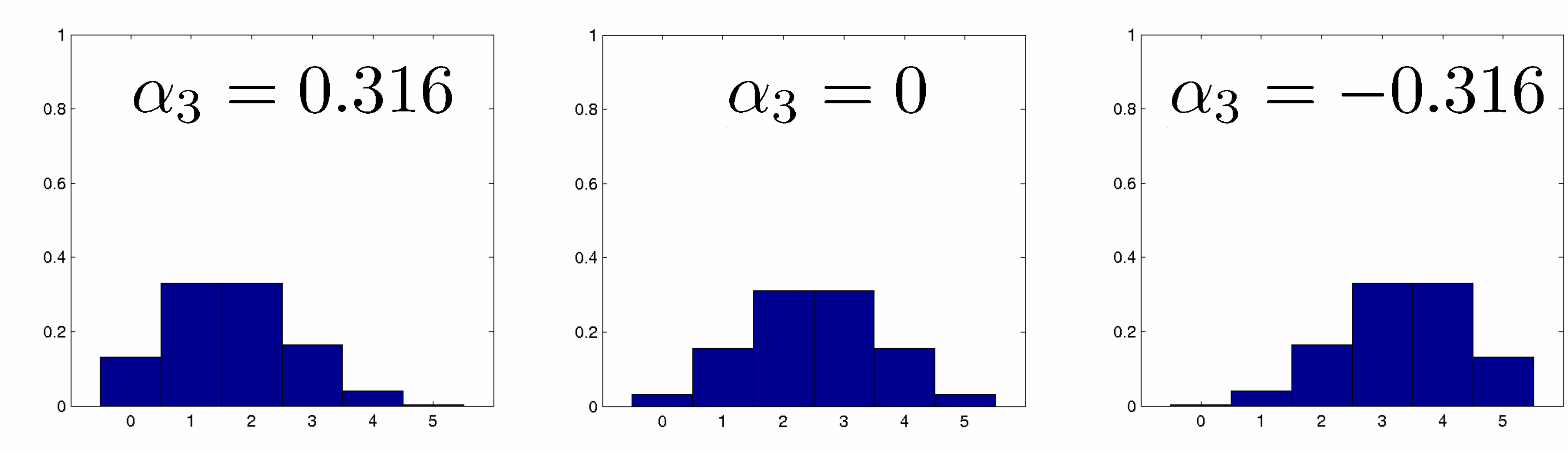
$$Z = \frac{X - E(X)}{D(X)}$$

と定義すれば, Z は**期待値0**, **分散1**になる

確率分布の形の指標 (1)

- **歪度(skewness)** α_3 ：確率分布の非対称性を表わす

$$\alpha_3 = \frac{E\{[X - E(X)]^3\}}{\{D(X)\}^3}$$

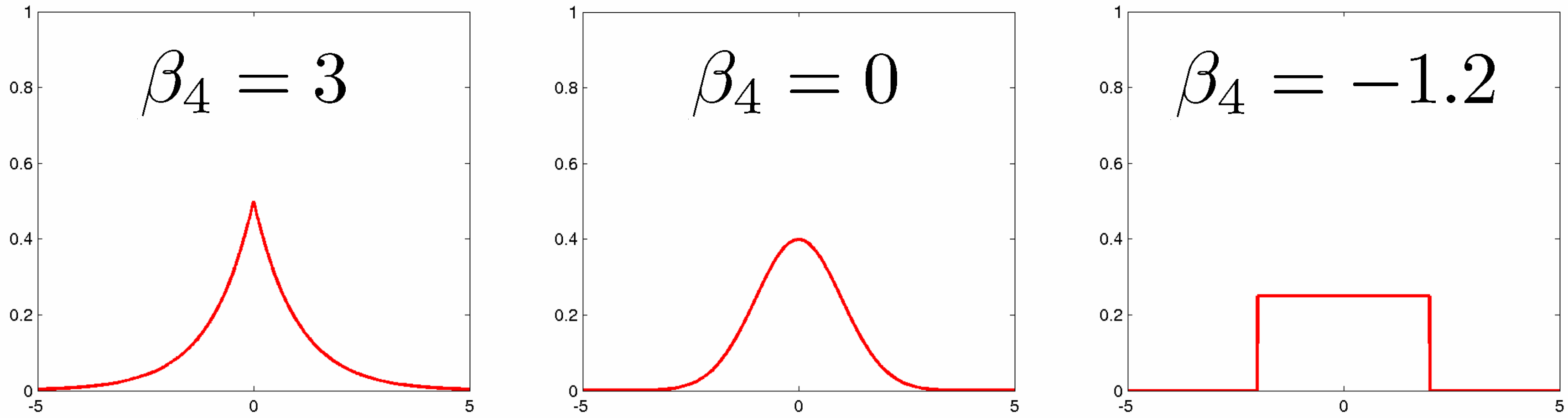


右すそが長い　　左右対称　　左すそが長い

確率分布の形の指標 (2)

- **尖度**(kurtosis) β_4 ：確率分布の尖り具合を表わす

$$\beta_4 = \frac{E\{[X - E(X)]^4\}}{\{D(X)\}^4} - 3$$



尖っている　　標準的な尖り具合 (正規分布)　　尖っていない

積率

- 確率分布は, 期待値, 分散, 歪度, 尖度を指定していくと, 形が限定されていく
- r次の積率(moment)：

$$\mu_r = E[X^r]$$

- 期待値まわりのr次の積率：

$$\nu_r = E\left[(X - E[X])^r\right]$$

- 全ての次数の積率を指定すれば, 確率分布を一意に決定することができる

積率母関数

- **積率母関数**(moment generating function)：

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \begin{cases} \displaystyle\sum_x e^{tx} f(x) \\ \displaystyle\int e^{tx} f(x) dx \end{cases}$$

- **全ての次数の積率を生成する関数．但し，積率母関数が存在しない（無限大に発散する）こともある**

積率母関数と積率

- 積率母関数の導関数にゼロを代入すれば積率が得られる。

$$M_X^{(r)}(0) = \mu_r$$

- 証明：e^{tX} を原点周りでテーラー展開する。

テーラー展開：$f(t)$ が無限回微分可能のとき

$$f(t) = f(a) + (t-a)\frac{f'(a)}{1!} + (t-a)^2\frac{f''(a)}{2!} + \cdots$$

$$e^{tX} = 1 + (tX) + \frac{(tX)^2}{2!} + \frac{(tX)^3}{3!} + \cdots$$

$$f(t) = e^{tX} \qquad f^{(r)}(t) = X^r e^{tX} \qquad f^{(r)}(0) = X^r$$

積率母関数と積率 (続き)

$$e^{tX} = 1 + (tX) + \frac{(tX)^2}{2!} + \frac{(tX)^3}{3!} + \cdots$$

両辺の期待値を取れば、 $\mu_r = E[X^r]$

$$M_X(t) = E[e^{tX}]$$

$$= E[1] + tE[X] + t^2\frac{E[X^2]}{2!} + t^3\frac{E[X^3]}{3!} + \cdots$$

$$= 1 + t\mu_1 + t^2\frac{\mu_2}{2!} + t^3\frac{\mu_3}{3!} + \cdots$$

積率母関数と積率 (続き)

$$M_X(t) = 1 + \mu_1 t + \frac{\mu_2}{2!}t^2 + \frac{\mu_3}{3!}t^3 + \cdots$$

$$M'_X(t) = \mu_1 + \mu_2 t + \frac{\mu_3}{2!}t^2 + \frac{\mu_4}{3!}t^3 + \cdots$$

$$M''_X(t) = \mu_2 + \mu_3 t + \frac{\mu_4}{2!}t^2 + \frac{\mu_5}{3!}t^3 + \cdots$$

$$\vdots$$

$$M_X^{(r)}(t) = \mu_r + \mu_{r+1} t + \frac{\mu_{r+2}}{2!}t^2 + \frac{\mu_{r+3}}{3!}t^3 + \cdots$$

$$\Rightarrow \quad M_X^{(r)}(0) = \mu_r$$

小レポート

1. 以下の分散の性質を証明せよ
   - A) $V(c) = 0$
   - B) $V(X + c) = V(X)$
   - C) $V(cX) = c^2 V(X)$
2. 分散, 歪度, 尖度を (原点周りの) 積率を用いて表せ
3. 二つのさいころの出る目の和の確率分布は次式で与えられる.

$$f(x) = \frac{6 - |7 - x|}{36}, \quad 2 \leq x \leq 12$$

   この分布の1次から4次までの積率, 及び, 期待値, 分散, 歪度, 尖度を求めよ (積率母関数を使おう！)

- 〆切は次回の授業 (5月16日 (火)) の開始時