

フーリエ変換及びラプラス変換 ---O クラス
 期末試験問題 (水本: 2006.8.3)

[注意 1] 問題は両面にわたって【問題 1】から【問題 5】までである。

[注意 2] 答案用紙にどの問題の答案であるのかわかるように解答を記載せよ。

【問題 1】

(1) 次の減衰パルスのラプラス変換を求めよ。

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \exp(-\alpha t) & (0 \leq t) \end{cases}$$

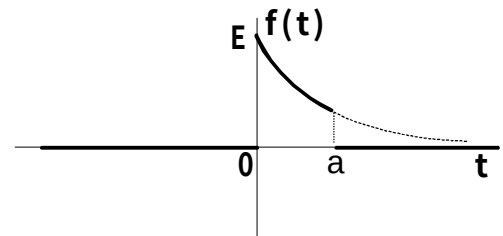
(2) 次のラプラス変換の性質を証明せよ。

$$L[\exp(-at)f(t)] = F(s+a)$$

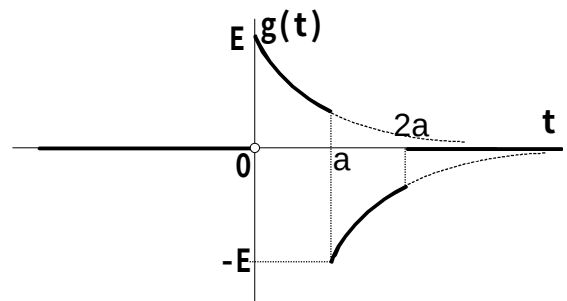
(3) 図 1(a), (b) で表される関数 $f(t)$, $g(t)$ のラプラス変換 $F(s)$, $G(s)$ を求めよ。

$$(a) f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0, a \leq t) \\ E \exp(-bt) & (0 \leq t < a) \end{cases}$$

$$(b) g(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0, 2a \leq t) \\ E \exp(-bt) & (0 \leq t < a) \\ -E \exp(-b(t-a)) & (a \leq t < 2a) \end{cases}$$



(a)



(b)

図 1

【問題 2】 次関数のラプラス変換を求めよ。

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at}$$

【問題 3】 次のラプラス逆変換を求めよ。

$$\frac{s}{(s+a)^2}$$

【問題 4】 図 2 に示す回路において、回路に印加する電圧 $v_i(t)$ を入力、抵抗 R_0 の両端の電圧 $v_o(t)$ を応答とした場合の伝達関数 $H(s)$ を求めよ。

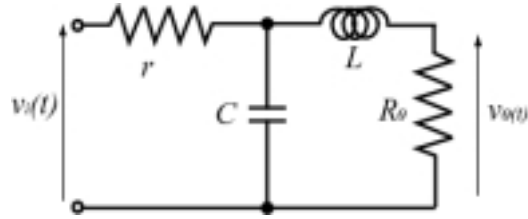


図 2

【問題 5】 線形回路の入力と応答の関係について記した次の文が正しい説明となるように、空欄(a)-(f)に入る式を解答せよ。

時不変な線形回路に δ 関数を入力として与えた場合の応答を $h(t)$ (インパルスレスポンス) とした場合、入力 $f(t)$ に対する応答 $g(t)$ は $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$ で求まる。 $f(t)$ 、 $g(t)$ 、 $h(t)$ のフーリエ変換をそれぞれ $F(\omega) = F[f(t)]$ 、 $G(\omega) = F[g(t)]$ 、 $H(\omega) = F[h(t)]$ とすると、それらの間には次の関係が成り立つ。

$$G(\omega) = \boxed{\text{(a)}} \quad (1)$$

さらに、逆変換の式から $g(t)$ は次の式で与えられる。

$$g(t) = \boxed{\text{(b)}} \quad (2)$$

一方、正弦波 $e^{j\omega_0 t}$ のフーリエ変換は次のようになる。

$$F(\omega) = \boxed{\text{(c)}} \quad (3)$$

ここで、 δ 関数とそのフーリエ逆変換の関係が $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$ で与えられることから、

$$\delta(\omega) = \boxed{\text{(d)}} \quad (4)$$

が成り立つので、式(3)は次のようになる。

$$F(\omega) = \boxed{\text{(e)}} \quad (5)$$

したがって、式(2)から正弦波 $e^{j\omega_0 t}$ に対する回路応答は

$$g(t) = \boxed{\text{(f)}} \quad (6)$$

となる。

解答例

【問題 1】

$$(1) f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \exp(-\alpha t) & (0 \leq t) \end{cases}$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-(s+\alpha)t}}{-(s+\alpha)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s+\alpha}$$

$$(2) L[\exp(-at)f(t)] = F(s+a)$$

$$L[\exp(-at)f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-at} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(a+s)t} dt = F(s+a)$$

(3)

$$(a) f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0, a \leq t) \\ E \exp(-bt) & (0 \leq t < a) \end{cases} \text{ は、次の 2 つの関数の重ね合わせで表される。}$$

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ E \exp(-bt) & (0 \leq t) \end{cases} - f_2(t) = \begin{cases} 0 & (t < a) \\ Ee^{-ba} \exp(-b(t-a)) & (a \leq t) \end{cases}$$

$$\text{また } \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \exp(-\alpha t) & (0 \leq t) \end{cases} \text{ のラプラス変換が } \frac{1}{s+\alpha} \text{ であるから、 } L[f_1(t)] = \frac{E}{s+b}, \quad L[f_2(t)] = \frac{Ee^{-ab}}{s+b} e^{-as}$$

$$(L[f(t-\tau)] = \exp(-s\tau)L[f(t)]) \text{ を用いる}$$

$$\text{したがって、 } L[f(t)] = \frac{E}{s+b} - \frac{Ee^{-ab}}{s+b} e^{-as} = \frac{E(1 - e^{-a(s+b)})}{s+b}$$

$$(b) g(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0, 2a \leq t) \\ E \exp(-bt) & (0 \leq t < a) \\ -E \exp(-b(t-a)) & (a \leq t < 2a) \end{cases} = f(t) - f(t-a) \text{ であるから、(a)の結果を用いて、}$$

$$L[g(t)] = \frac{E(1 - e^{-a(s+b)})}{s+b} - \frac{E(1 - e^{-a(s+b)})}{s+b} e^{-as} = \frac{E(1 - e^{-a(s+b)})(1 - e^{-as})}{s+b}$$

【問題 2】

$$\begin{aligned} L\left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right] &= \int_0^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-st} dt = \left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s} \int_0^{\infty} \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} e^{-st} dt = \frac{1}{s^2} \int_0^{\infty} \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} e^{-st} dt = \cdots = \frac{1}{s^{n-1}} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s^n} \end{aligned}$$

$$\text{であるから、 } L\left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at}\right] = \frac{1}{(s-a)^n}$$

【問題 3】

$\frac{s}{(s+a)^2} = \frac{1}{s+a} - \frac{a}{(s+a)^2}$ と部分分数展開される。

$L[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$ 、 $L[te^{-at}] = \frac{1}{(s+a)^2}$ であるから、上式のラプラス逆変換は $e^{-at} - ate^{-at} = (1-at)e^{-at}$

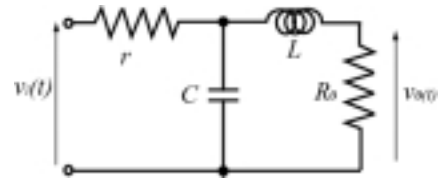
【問題 4】

抵抗 r に流れる電流を i 、コンデンサの両端の電圧を v_c 、抵抗 R_0 に流れる電流を i_R とすると、次の関係式が成り立つ。

$$ri + v_c = v_i$$

$$v_c = L \frac{di_R}{dt} + R_0 i_R$$

$$i = C \frac{dv_c}{dt} + i_R$$



これを整理して、 i_R に関する微分方程式を導出すると、次のようになる。

$$r \left(C \left(L \frac{d^2 i_R}{dt^2} + R_0 \frac{di_R}{dt} \right) + i_R \right) + L \frac{di_R}{dt} + R_0 i_R = v_i$$

$$rCL \frac{d^2 i_R}{dt^2} + (rCR_0 + L) \frac{di_R}{dt} + (R_0 + r) i_R = v_i$$

一方、 $v_0 = R_0 i_R$ であるから、

$$rCL \frac{d^2 v_0}{dt^2} + (rCR_0 + L) \frac{dv_0}{dt} + (R_0 + r) v_0 = R_0 v_i$$

ここで、 $v_i(t) = \delta(t)$ としてラプラス変換すると、

$$rCLs^2 V_0 + (rCR_0 + L)sV_0 + (R_0 + r)V_0 = R_0$$

したがって、伝達関数は次のようになる。

$$H(s) = V_0 = \frac{R_0}{rCLs^2 + (rCR_0 + L)s + (R_0 + r)}$$

【問題 5】

時不変な線形回路に δ 関数を入力として与えた場合の応答を $h(t)$ (インパルスレスポンス) とした場合、入力 $f(t)$ に対する応答 $g(t)$ は $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$ で求まる。

$f(t)$ 、 $g(t)$ 、回路のインパルスレスポンス $h(t)$ のフーリエ変換をそれぞれ $F(\omega) = F[f(t)]$ 、 $G(\omega) = F[g(t)]$ 、 $H(\omega) = F[h(t)]$ とすると、それぞれのフーリエ変換の間には次の関係が成り立つ。

$$G(\omega) = F[g(t)] = F[f * h] = F[f(t)]F[h(t)] = F(\omega)H(\omega) \quad (1)$$

さらに、逆変換の式から $g(t)$ は次の式で与えられる。

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2)$$

一方、正弦波 $e^{j\omega_0 t}$ のフーリエ変換は次のようになる。

$$F(\omega) = F[e^{j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_0 - \omega)t} dt \quad (3)$$

ここで、 δ 関数とそのフーリエ逆変換の関係が $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$ で与えられることから、

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dt \quad (4)$$

が成り立つので、式(3)は次のようになる。

$$F[e^{j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_0 - \omega)t} dt = 2\pi\delta(\omega_0 - \omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (5)$$

したがって、式(2)から正弦波入力 $e^{j\omega_0 t}$ に対する回路応答は

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega = H(\omega_0) e^{j\omega_0 t} \quad (6)$$

となる。