10.2 ラプラス変換と線形回路

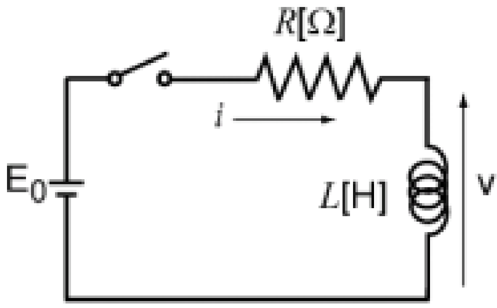
(1)回路応答の過渡解析

ラプラス変換は、定係数の線形微分方程式を解く手段として用いられる。電気回路(線形回路)の過渡応答は微分方程式を解くことによって得られるので、この目的でラプラス変換がよく用いられる。

[例]

右の図で、$t=0$ において SW が on になったとする。また、SW を on にする直前の電流が $i(0_-)=I_i$ であったとする。$t=0$ 以後、回路の電圧電流の関係式は次のようになる。

$$L\frac{d}{dt}i+Ri=E_0 \qquad (10.9)$$



電流 $i(t)$ のラプラス変換を $I(s)$ とすると、式(10.9)のラプラス変換は

$$L\left(sI(s)-I_i\right)+RI(s)=\frac{E_0}{s} \qquad (10.10)$$

これを $I(s)$ についてまとめると、次の式を得る。

$$\left(Ls+R\right)I(s)=\frac{E_0}{s}+LI_i$$

$$\begin{aligned} I(s)&=\frac{E_0}{s\left(Ls+R\right)}+\frac{LI_i}{Ls+R}=\frac{E_0}{R}\left(\frac{1}{s}-\frac{L}{Ls+R}\right)+\frac{LI_i}{Ls+R}=\frac{E_0}{R}\frac{1}{s}+\frac{L}{Ls+R}\left(I_i-\frac{E_0}{R}\right)\\ &=\frac{E_0}{R}\frac{1}{s}+\left(I_i-\frac{E_0}{R}\right)\frac{1}{s+\frac{R}{L}} \end{aligned} \qquad (10.11)$$

式(10.11)をラプラス逆変換して、電流 $i(t)$ が次のように求まる。

$$i(t)=\frac{E_0}{R}+\left(I_i-\frac{E_0}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t} \qquad (10.12)$$

ここで、SW を on にする直前の電流が $i(0_-)=I_i=0$ であったとすると、$t=0$ 以後に回路を流れる電流は次のようになる。

$$i(t)=\frac{E_0}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

(2)任意の入力信号に対する応答

線形回路の特性が時不変であり、インパルス応答が $T\left[\delta(t)\right]=h(t)$ で与えられるものとする。このとき、任意の信号 $f(t)$ を入力に加えた場合の応答 $g(t)$ は、次のようにして求まる。

$$g(t)=T\left[f(t)\right]=T\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right]=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)T\left[\delta(t-\tau)\right]d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

すなわち、

$$g(t)=f(\tau)*h(t-\tau) \qquad (10.13)$$

である。さらに、変数変換により、

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t')T\left[\delta(t')\right]dt' = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

$\delta(t) = 0$ ($t < 0$)であるから、因果律により $h(t) = 0 \quad (t < 0)$ すなわし $h(t-\tau) = 0 \quad (t-\tau < 0)$ 。

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{\infty}^{0} f(t-\tau')h(\tau')(-d\tau') = \int_{0}^{\infty} f(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

(10.14)

式(10.14)は、回路応答の初期値をすべて 0 とし、これに $t < 0$ において $f(t) = 0$ であるような入力信号を加える場合の応答を表している。この式の両辺をラプラス変換してみる。

$$\int_{0}^{\infty} g(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{t} f(\tau)h(t-\tau)d\tau e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{t} f(\tau)h(t-\tau)d\tau e^{-st}dt$$
$$= \int_{0}^{t} f(\tau)d\tau \int_{0}^{\infty} h(t-\tau)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}d\tau \int_{\tau}^{\infty} h(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}dt$$
$$= \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \int_{0}^{\infty} h(t)e^{-st}dt$$

すなわち、 $g(t)$ 、 $f(t)$ 、 $h(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $G(s)$ 、 $F(s)$ 、 $H(s)$ と書くことにすれば、

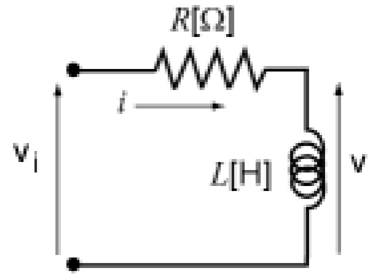
$$G(s) = H(s)F(s) \qquad (10.15)$$

が成り立つ。ここで、 $H(s)$ をこの回路の伝達関数とよぶ。

(3)伝達関数

伝達関数 $H(s)$ を求める例を示す。

[例 1]



電源電圧 $v_i(t)$ を入力、L-R 直列回路に流れる電流 $i(t)$ を応答と考える。

$$L\frac{d}{dt}i(t) + Ri(t) = v_i(t) \qquad (10.16)$$

電流 $i(t)$ のラプラス変換を $I(s)$ とし、初期状態を $i(0\_) = 0$ とおく。さらに入力電圧として $v_i(t) = \delta(t)$ を考えた場合の応答 $i(t)$ のラプラス変換が伝達関数であるので、式(10.16)から次の関係が成り立つ。

$$sLH(s) + RH(s) = 1$$

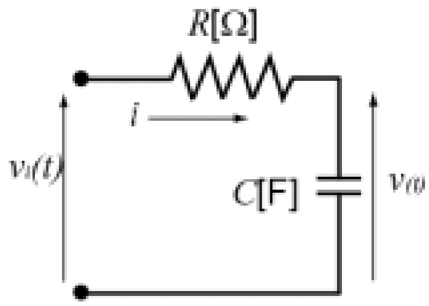
すなわち、この回路の伝達関数は

$$H(s) = \frac{1}{R+sL} \qquad (10.17)$$

[例 2]

電源電圧 $v_i(t)$ を入力、C-R 直列回路において C の両端に発生する電圧 $v(t)$ を応答と考える。

$$v(t)+Ri(t)=v_i(t)$$
$$i(t)=C\frac{dv(t)}{dt} \qquad (10.18)$$



より、$v_i(t)=\delta(t)$、$v(0\_)=0$ として両辺をラプラス変換する。

このとき、伝達関数は応答 $v(t)$ のラプラス変換 $H(s)=L[v(t)]$ であるから、

$$H(s)+RCsH(s)=1$$

すなわち、

$$H(s)=\frac{1}{1+RCs} \qquad (10.19)$$

と求まる。

(4) 系の安定性

系の伝達関数を次のように表すことができたとする。

$$H(s)=\frac{K\left(s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0\right)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_i)\cdots(s-s_n)}=\frac{A_1}{s-s_1}+\frac{A_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{A_i}{s-s_i}+\cdots$$

これをラプラス逆変換すると、

$$h(t)=\left(A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}+\cdots\right)u(t)$$

で表すことができる。

ここで、伝達関数の極 s_i が実数の場合と複素数の場合について考える。

(a) s_i が実数 α_i の場合

$\alpha_i<0$ であれば、$e^{s_it}=e^{\alpha_it}$ は時間の経過とともに収束する。逆に、$\alpha_i>0$ の場合、$e^{s_it}=e^{\alpha_it}$ は時間の経過とともに増大する。

(b) s_i が複素数 $\alpha_i+j\omega$ の場合

$\alpha_i<0$ であれば e^{s_it} は時間の経過とともに収束し、$\alpha_i>0$ の場合には時間の経過とともに増大する。

すなわち、応答が時間とともに 0 に収束する(安定な系である)ためには、伝達関数の極のすべてが s の複素平面の左半面に存在する必要がある。