

9. ラプラス変換の基礎

9.1 ラプラス変換の定義

フーリエ変換では、 $-\infty < t < \infty$ で定義された関数 $f(t)$ に $e^{-j\omega t}$ をかけて $-\infty < t < \infty$ で積分していた。

$t \rightarrow \pm\infty$ における $f(t)$ の振る舞いによっては積分が収束しない場合もある ($F(\omega)$ が存在しない)。

これに対して、ラプラス変換では、区間 $0 \leq t < \infty$ のみを考える。さらに、 $e^{-j\omega t}$ の代わりに $e^{-(\sigma+j\omega)t}$ をかけて $0 \leq t < \infty$ で積分する。このとき、 σ は積分が収束するように適当に選ぶことを許す。このようにして変換された関数をラプラス変換とよぶ(変換可能な関数の範囲がフーリエ変換に比べて広がった)。

すなわち、 $0 \leq t < \infty$ で定義された関数 $f(t)$ が $t \rightarrow \infty$ で発散してフーリエ積分 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$ が計算できない。これに対して、 $g(t) = f(t)e^{-\sigma t}$ を考え、 $0 \leq t < \infty$ 以外では $f(t) = 0$ として

$$G(\omega) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t} dt \quad (9.1)$$

を計算する。 σ を適当に選べば、この積分は存在し、 $G(\omega)$ を計算することができる。

$s = \sigma + j\omega$ とおいて、あらためてラプラス変換・逆変換は次のように定義される。

ラプラス変換：

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (9.2)$$

ラプラス逆変換：

$$f(t) = \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (9.3)$$

9.2 ラプラス変換の性質

関数 $f(t)$ をラプラス変換して $F(s)$ を求めることを、 $F(s) = L[f(t)]$ と書くことにする。ラプラス変換では次の関係(性質)が成り立つ。

(1)線形性

$$L[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha L[f_1(t)] + \beta L[f_2(t)] \quad (9.4)$$

(2)原関数の移動

$$L[f(t-\tau)] = \exp(-s\tau)L[f(t)] \quad (\tau > 0) \quad (9.5)$$

(3)像関数の移動

$$L[\exp(-at)f(t)] = F(s+a) \quad (9.6)$$

(4)時間軸の拡大

$$L[f(At)] = \frac{1}{A} F\left(\frac{s}{A}\right) \quad (A > 0) \quad (9.7)$$

(5)時間微分

$$\begin{aligned} L[f'(t)] &= sL[f(t)] - f(0) \\ L[f''(t)] &= s^2L[f(t)] - (sf(0) + f'(0)) \\ L[f^{(n)}(t)] &= s^nL[f(t)] - (s^{n-1}f(0) + s^{n-2}f'(0) + s^{n-3}f''(0) + \cdots + sf^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)) \end{aligned} \quad (9.8)$$

(6)畳み込み関数のラプラス変換

$$f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \text{ に対して、 } L[f_1 * f_2] = L[f_1]L[f_2] \quad (9.9)$$