

## 6. フーリエ変換と線形システム

### 6.1 回路の性質

例えば、図 6.1 に示す回路を考える。左側の端子対に電圧  $v_i(t)$  を印加した結果、コンデンサの両端に電圧  $v_c(t)$  が発生したとする。  $v_c(t)$  は時間とともにどのように変化するであろうか。

与えた入力  $f(t)$  による出力(応答)  $g(t)$  は、回路の特性によって決まる。これを回路の特性を表す演算子  $T$  を用いて次のように表現する。

$$T[f(t)] = g(t) \quad (6.1)$$

以下においては、次の性質がある回路を対象とする。

(i) 線形性

$$T[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha T[f_1(t)] + \beta T[f_2(t)] = \alpha g_1(t) + \beta g_2(t) \quad (6.2)$$

(ii) 時不変性：系の特性が時間によって変化しない

$$T[f(t)] = g(t) \text{ なら } T[f(t-\tau)] = g(t-\tau) \quad (6.3)$$

(iii) 因果律：結果が原因より先に現れることはない

すなわち、  $t < 0$  で入力  $f(t) = 0$  であるとすれば、  $t < 0$  において  $T[f(t)] = g(t) = 0$  である。

さらに、  $\delta$  関数を入力として与えた場合の応答を  $h(t)$  (インパルスレスポンス) とすると  $T[\delta(t)] = h(t)$  であり、一般の入力  $f(t)$  に対する応答  $g(t)$  は次のような関係がある。

(i) 一般の入力  $f(t)$  は  $\delta$  関数の性質により次のように表される。

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \quad (6.4)$$

(ii)  $\delta$  関数入力の応答  $T[\delta(t)] = h(t)$  と系の時不変性により  $T[\delta(t-\tau)] = h(t-\tau)$  が成り立つ。

(iii) 入力  $f(t)$  に対する応答  $g(t)$  は回路の特性を表す演算子  $T$  を用いて次のように表される。

$$g(t) = T[f(t)] = T\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau\right] \quad (6.5)$$

ここで、演算子  $T$  は時間変数  $t$  に対する演算子であるから、

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) T[\delta(t-\tau)] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (6.6)$$

(入力  $f(t)$  と  $\delta$  関数入力の応答  $h(t)$  の畳み込み)

式(6.6)は、  $t' = t - \tau$  と変数変換すれば、次のように書くことができる。

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t') T[\delta(t')] dt' = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) h(\tau) d\tau \quad (6.7)$$

(iv) 因果律より  $t < 0$  で  $\delta(t) = 0$  だから  $h(t) = 0$  ( $t < 0$ )、  $h(t-\tau) = 0$  ( $t-\tau < 0$ )。すなわち、  $t < \tau$  で  $h(t-\tau) = 0$  となる。したがって入力  $f(t)$  に対する応答  $g(t)$  は次の式で与えられる。

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) h(\tau) d\tau \quad (6.8)$$

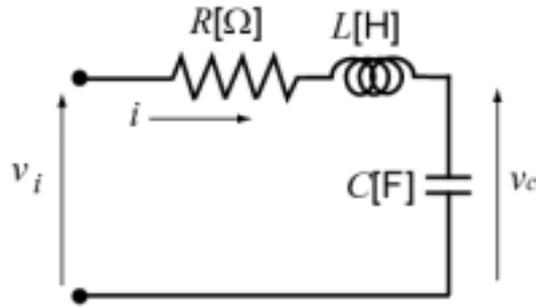


図 6.1

## 6.2 回路応答のフーリエ変換

## (1)インパルスレスポンスによる回路応答の表現

入力  $f(t)$  に対する応答  $g(t)$  と回路のインパルスレスポンス  $T[\delta(t)] = h(t)$  のフーリエ変換をそれぞれ  $F(\omega) = F[f(t)]$ 、 $G(\omega) = F[g(t)]$ 、 $H(\omega) = F[h(t)]$  とすると、式(6.6)に示されるように  $g(t)$  は  $f(t)$  と  $h(t)$  の畳み込み積分で与えら得るので、それぞれのフーリエ変換の間には次の関係が成り立つ。

$$G(\omega) = F[g(t)] = F[f * h] = F[f(t)]F[h(t)] = F(\omega)H(\omega) \quad (6.9)$$

さらに、逆変換の式から  $g(t)$  は次の式で与えられる。

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)H(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (6.10)$$

式(6.9)、(6.10)の意味：

- ・回路の周波数特性が  $H(\omega) = F[h(t)]$  で表されると考えれば、応答のスペクトル密度  $G(\omega) = F[g(t)]$  は入力スペクトル密度  $F(\omega) = F[f(t)]$  と  $H(\omega) = F[h(t)]$  の積で決まるということを表す。
- ・回路の周波数特性  $H(\omega) = F[h(t)]$  のうち、振幅特性は  $|H(\omega)|$  で表され、位相特性は  $\arg[H(\omega)]$  で表される。
- ・応答の時間波形を得るためには、 $G(\omega) = F(\omega)H(\omega)$  をフーリエ逆変換すればよい。

## (2)正弦波入力に対する応答

正弦波のフーリエ変換は次のようになる。

$$F(\omega) = F[e^{j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_0 - \omega)t} dt \quad (6.11)$$

ここで、 $\delta$  関数のフーリエ逆変換の関係  $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$  から、

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dt \quad (6.12)$$

が成り立つので、式(6.11)は次のようになる。

$$F[e^{j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_0 - \omega)t} dt = 2\pi\delta(\omega_0 - \omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (6.13)$$

したがって、式(6.10)から正弦波入力  $e^{j\omega_0 t}$  に対する回路応答は

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)H(\omega)e^{j\omega t} d\omega = H(\omega_0)e^{j\omega_0 t} \quad (6.14)$$

となる。すなわち、正弦波入力  $e^{j\omega_0 t}$  に対する回路の時間応答は  $H(\omega_0)e^{j\omega_0 t}$  となり、伝達関数はインパルスレスポンスのフーリエ変換で  $\omega = \omega_0$  とした関数に等しいことがわかる。

[例]

図 6.2 の回路で、コンデンサの両端の電圧  $v_c(t)$  を入力電圧  $f(t)$  に対する応答と考え、その関係を時間領域と周波数領域で考える。

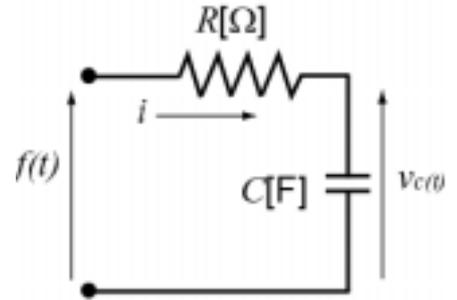


図 6.2 R-C 直列回路

(a)回路のインパルスレスポンス  $T[\delta(t)] = h(t)$

$i(t) = C \frac{dv_c}{dt}$  であるから、

$$Ri(t) + v_c(t) = RC \frac{d}{dt} v_c(t) + v_c(t) = \delta(t) \quad (6.15)$$

(入力電圧が印加される前は  $v_c(0_-) = 0$ )

まず、 $t > 0$  における関数の形を求める。 $t > 0$  で  $\delta(t) = 0$  あるから、式(6.15)は次のようになる。

$$RC \frac{d}{dt} v_c(t) + v_c(t) = 0$$

$$\frac{d}{dt} v_c(t) = -\frac{1}{RC} v_c(t)$$

すなわち、 $t > 0$  で

$$v_c(t) = a \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (6.16)$$

つぎに、 $t = 0$  における初期値を求めるために、式(6.15)の両辺を  $t = 0$  の前後  $-\varepsilon \leq t \leq \varepsilon$  にわたって積分し、 $\varepsilon \rightarrow 0$  とする。

$$RC \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{d}{dt} v_c(t) dt + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} v_c(t) dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt \quad (6.17)$$

において、 $\varepsilon \rightarrow 0$  とすると

$$RC \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{d}{dt} v_c(t) dt = RC[v_c(\varepsilon) - v_c(-\varepsilon)] \rightarrow RCv_c(0_+)$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} v_c(t) dt \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt \rightarrow 1$$

であるから、式(6.17)から次の初期値を得る。

$$v_c(0_+) = \frac{1}{RC}$$

したがって、 $v_c(t)$  のインパルスレスポンス(時間領域の応答)は次のようになる。

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (6.18)$$

このインパルスレスポンスのフーリエ変換を求める。

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{RC} \left[ \frac{\exp\left(-\left(\frac{1}{RC} + j\omega\right)t\right)}{-\left(\frac{1}{RC} + j\omega\right)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{1 + j\omega CR} \quad (6.19)$$

## (b)交流理論による定常波解析

入力(印加電圧)を  $f(t) = e^{j\omega t}$  とすると定常波解析が適用でき、回路を流れる電流の複素表現

$$I(t) = \frac{e^{j\omega t}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega C e^{j\omega t}}{1 + j\omega CR} \quad (6.20)$$

から、コンデンサの両端の電圧(応答)は、次のようになる。

$$V_c(t) = \frac{1}{j\omega C} \frac{e^{j\omega t}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{e^{j\omega t}}{1 + j\omega CR} \quad (6.21)$$

すなわち  $H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega CR}$  であるから、確かに入力  $f(t) = e^{j\omega t}$  に対する応答は  $H(\omega)e^{j\omega t}$  になっている。

つまり、「(a)の方法のように微分方程式を解いてインパルスレスポンス  $H(\omega)$  を求める必要はなく、より簡単な交流の定常波解析によって入力  $f(t) = e^{j\omega t}$  に対する応答 ( $H(\omega)e^{j\omega t}$ ) を求め、その結果を  $e^{j\omega t}$  で除すればインパルスレスポンス  $H(\omega)$  が得られる」ということである。

さらに、 $\delta$  関数入力に対する電流  $i(t)$  を考えると、 $i(t) = C \frac{dv_c}{dt}$  であるからこのフーリエ変換は次のようになる。

$$F[i(t)] = F\left[C \frac{dv_c}{dt}\right] = j\omega C F[v_c(t)] = \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC} \quad (6.22)$$

式(6.20)より  $I(t) = \frac{e^{j\omega t}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega C e^{j\omega t}}{1 + j\omega CR}$  であるから、電流についても入力  $f(t) = e^{j\omega t}$  に対する応答は

$\delta$  関数入力の応答  $F[i(t)] = \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC}$  と  $e^{j\omega t}$  の積で与えられることが確かめられた。

## 6.3 回路の時間応答と周波数応答

回路のインパルスレスポンスが分かれば、任意の入力に対する周波数応答や時間応答を求めることができる。このことを、次の例で理解しよう。

## (1)R-C 直列回路

図 6.2 の R-C 直列回路で、時間応答と周波数応答の関係を考えてみる。

この回路に、単一矩形パルスを入力した場合の応答(コンデンサの両端の電圧)を調べる。

- ・コンデンサ両端の電圧のインパルスレスポンス： $H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega CR}$
- ・入力信号(単一矩形パルス)のスペクトル密度： $F(\omega) = 2E \frac{\sin a\omega}{\omega}$
- ・応答(コンデンサの両端の電圧)のスペクトル密度： $G(\omega) = F(\omega)H(\omega) = 2E \frac{\sin a\omega}{\omega} \frac{1}{1 + j\omega CR}$

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)H(\omega)e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2E \frac{\sin a\omega}{\omega} \frac{1}{1 + j\omega CR} e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{E}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\sin a\omega}{\omega} \frac{1}{1 + j\omega CR} e^{j\omega t} d\omega + \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin a\omega}{\omega} \frac{1}{1 + j\omega CR} e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin a\omega}{\omega} \frac{1}{1 - j\omega CR} e^{-j\omega t} d\omega + \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin a\omega}{\omega} \frac{1}{1 + j\omega CR} e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin a\omega}{\omega} \left( \frac{1}{1 + j\omega CR} e^{j\omega t} + \frac{1}{1 - j\omega CR} e^{-j\omega t} \right) d\omega \\
 &= \frac{2E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin a\omega}{\omega} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{1 + j\omega CR} e^{j\omega t} \right] d\omega \\
 &= \frac{2E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin a\omega}{\omega} \frac{\cos \omega t + \omega CR \sin \omega t}{1 + (\omega CR)^2} d\omega
 \end{aligned}$$

ここで、 $x = \frac{t}{a}$  (時間軸はパルス幅で規格化)、 $a\omega = u$  として  $\omega t = ux$ 、さらに  $\frac{CR}{a} = c$  とおいて整理する。

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \frac{2E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin a\omega}{\omega} \frac{\cos \omega t + \omega CR \sin \omega t}{1 + (\omega CR)^2} d\omega \\
 &= \frac{2E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin a\omega}{a\omega} \frac{\cos \omega t + a\omega \frac{CR}{a} \sin \omega t}{1 + \left( a\omega \frac{CR}{a} \right)^2} d(a\omega) \\
 &= \frac{2E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} \frac{\cos ux + uc \sin ux}{1 + (uc)^2} du
 \end{aligned}$$

この式に基づいて計算した時間応答波形を図6.3に示す。

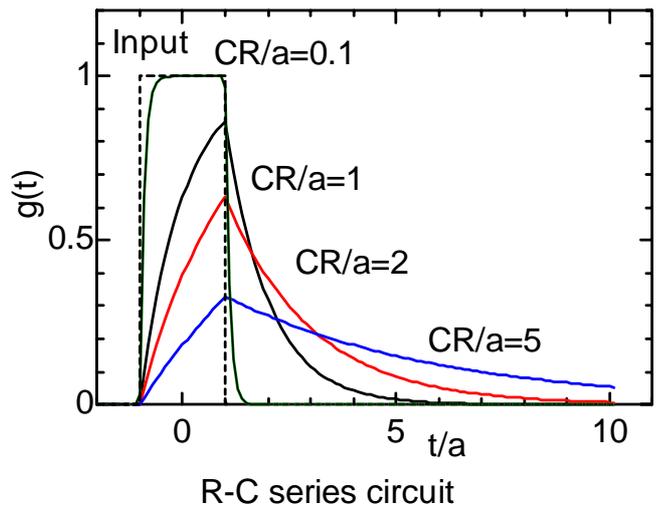


図 6.3 R-C 直列回路の時間応答(入力パルス幅  $2a$ )

## 7. シャノンの標本化定理

「周波数帯域がある値以下に制限されている波形は、その波形を一定時間間隔で標本化(サンプリング)して得られる標本値だけで再現できる。ここで、周波数帯域が  $W$  [Hz]以下に制限されていれば、

$\frac{1}{2W}$  [sec]ごとに標本化すれば(サンプリング周波数  $2W$  [Hz])、この離散的な信号だけから元のアナログ波形が再現できる。」

[証明]

元の信号を  $f(t)$ 、 $\frac{1}{2W}$  [sec]ごとのサンプリング時刻を  $t_i = \frac{i}{2W}$  ( $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) とする。

また、 $f(t)$  のフーリエ変換を  $F(\omega)$  とする。

(i) 周波数帯域が  $W$  [Hz]以下に制限されているので、 $|\omega| > 2\pi W$  で  $F(\omega) = 0$  である。すなわち、 $F(\omega)$  を  $-2\pi W \leq \omega \leq 2\pi W$  でのみ定義された周期  $4\pi W$  の関数と考え、フーリエ級数で展開する。

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(jn \frac{2\pi}{4\pi W} \omega\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(j \frac{n}{2W} \omega\right) \quad (7.1)$$

$$\text{ここで、} c_n = \frac{1}{4\pi W} \int_{-2\pi W}^{2\pi W} F(\omega) \exp\left(-j \frac{n}{2W} \omega\right) d\omega \quad (7.2)$$

(ii)  $F(\omega)$  のフーリエ逆変換から、

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi W}^{2\pi W} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi W}^{2\pi W} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(j \frac{n}{2W} \omega\right) \right) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-2\pi W}^{2\pi W} \exp\left(j \frac{n}{2W} \omega\right) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2c_n \int_0^{2\pi W} \cos\left(\frac{n}{2W} + t\right) \omega d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left[ \frac{\sin\left(\frac{n}{2W} + t\right) \omega}{\frac{n}{2W} + t} \right]_0^{2\pi W} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{\sin 2\pi W \left(\frac{n}{2W} + t\right)}{\frac{n}{2W} + t} = 2W \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{\sin 2\pi W \left(t + \frac{n}{2W}\right)}{2\pi W \left(t + \frac{n}{2W}\right)} \end{aligned}$$

$n$  を書き直すと次式を得る。

$$f(t) = 2W \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n} \frac{\sin 2\pi W \left(t - \frac{n}{2W}\right)}{2\pi W \left(t - \frac{n}{2W}\right)} \quad (7.4)$$

一方、フーリエ逆変換の式(7.3)で  $t_n = \frac{n}{2W}$  とすると、

$$f(t_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi W}^{2\pi W} F(\omega) e^{j\omega \frac{n}{2W}} d\omega$$

式(7.2)と見比べれば、 $f(t_n) = 2W c_{-n}$  となる。

すなわち、式(7.4)は次のように書き改めることができる。

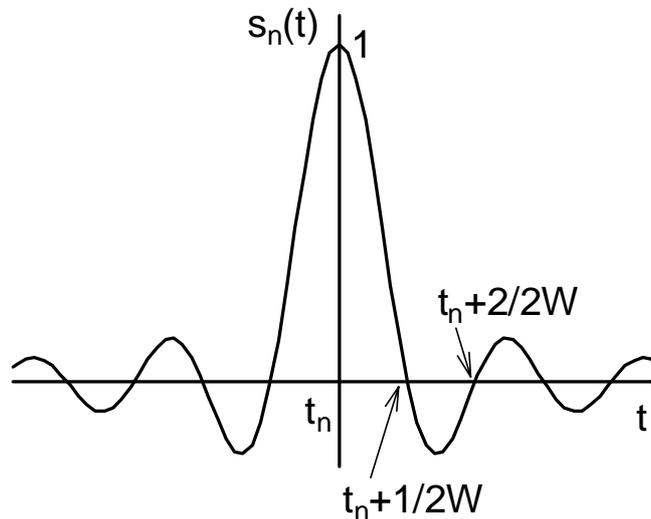
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) \frac{\sin 2\pi W \left( t - \frac{n}{2W} \right)}{2\pi W \left( t - \frac{n}{2W} \right)} \quad (7.5)$$

すなわち、式(7.5)から標本点  $t_n = n/2W$  における標本値  $f(t_n)$  がわかれば、元波形  $f(t)$  は標本化関数(sinc

関数)  $s_n(t) = \frac{\sin 2\pi W \left( t - \frac{n}{2W} \right)}{2\pi W \left( t - \frac{n}{2W} \right)}$  と標本値  $f(t_n)$  から再現することができる。

なお、標本化関数  $s_n(t) = \frac{\sin 2\pi W \left( t - \frac{n}{2W} \right)}{2\pi W \left( t - \frac{n}{2W} \right)}$  は次の特徴をもつ関数である。

- $s_0(t) = \frac{\sin 2\pi W t}{2\pi W t}$  を  $t_n = n/2W$  だけ平行移動した関数である。
- $t_n = n/2W$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ) で  $s_0(t_n) = \frac{\sin n\pi}{n\pi} = 0$
- $s_0(0) = 1$



標本化関数