5.3 畳み込み関数とそのフーリエ変換

次の積分演算を Convolution(畳み込み)という。

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \quad (5.14)$$

$f(t)$ を二つの関数 $f_1(t)$ と $f_2(t)$ の畳み込み関数と呼び、 $f = f_1 * f_2$ で表す。

畳み込み関数のフーリエ変換は、次のように二つの関数のフーリエ変換の積に等しい。

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t') e^{-j\omega(t'+\tau)} dt' \right) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t') e^{-j\omega t'} dt' \end{aligned}$$

すなわち、

$$F[f_1 * f_2] = F_1(\omega) F_2(\omega) \quad (5.15)$$

5.4 Parseval の等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \quad (5.16)$$

[証明]

$$F[f_1(t) f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

すなわち、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) F_2(\omega - y) dy$$

において、 $\omega=0$ とおくと、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) F_2(-y) dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2(-\omega) d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt$$

ここで、 $f_2(t) = g(t)^*$ とすると、

$$F_2(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-j(-\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)^* e^{j\omega t} dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \right)^* = G(\omega)^* \quad (5.17)$$

したがって、次の式が成り立つ

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(\omega)^* d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t)^* dt \quad (5.18)$$

ここで、特に $g(t) = f(t)$ とすれば、次の Parseval の等式が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

Parseval の等式の物理的な意味

$f(t)$ を 1Ω の抵抗の両端の電圧とすれば、 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$ は 1Ω の抵抗が消費する全電力を表す。

これが $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F(\omega)|^2}{2\pi} d\omega$ に等しいということは、 $\frac{|F(\omega)|^2}{2\pi}$ が ω におけるスペクトル成分に含まれるエネルギー密度を表しているということを意味する。

5.5 時間波形と周波数スペクトルの双対性

時間関数 $f(t)$ をフーリエ変換するとスペクトル密度 $F(\omega)$ が得られる。すなわち、 $F[f(t)] = F(\omega)$ 、

$f(t) = F^{-1}[F(\omega)]$ であるから、時間領域と周波数領域の間には双対関係が存在する。

双対関係の例として、次のことがあげられる。

- ・時間軸上の 1 点でのみ非零の値をもつ関数は δ 関数であり、その周波数スペクトルは $-\infty$ から ∞ の周波数軸上で一定値 1 をもつ。
- ・一つの周波数成分だけをもつ関数は正弦関数もしくは直流であり、その周波数スペクトルは $\delta(\omega)$ である。このような関数は、時間軸上では $-\infty$ から ∞ で一定の振幅をもつ。

5.6 その他

フーリエ変換の結果に負の周波数 ω が含まれることにとまどいを感じるかも知れない。 $f(t)$ が実関数の場合には、式(4.2)から次の関係が成り立つ。

$$F(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t} dt = F(\omega)^* \quad (5.19)$$

このとき、フーリエ逆変換で $F(\omega)$ から $f(t)$ を求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 F(\omega)e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(-\omega)e^{-j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \right)^* + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}[F(\omega)e^{j\omega t}] d\omega \end{aligned}$$

すなわち、実関数 $f(t)$ を得るためには、正の周波数の正弦波 $e^{j\omega t}$ 成分だけでよいことがわかる。