4.2 フーリエ積分

$f(t)$が実関数であるとして$e^{-j\omega t}=\cos\omega t - j\sin\omega t$を用いると、式(4.2)の$F(\omega)$は次のようになる。

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt - j\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt = A(\omega)-jB(\omega) \qquad (4.4a)$$

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt$$ ：フーリエ余弦変換（$A(-\omega)=A(\omega)$） (4.4b)

$$B(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt$$ ：：フーリエ正弦変換（$B(-\omega)=-B(\omega)$）(4.4c)

これを用いると、フーリエ逆変換は次のようになる。

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(A(\omega)-jB(\omega)\right)\left(\cos\omega t + j\sin\omega t\right)d\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(A(\omega)\cos\omega t + B(\omega)\sin\omega t\right)d\omega + \frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(A(\omega)\sin\omega t - B(\omega)\cos\omega t\right)d\omega$$

ここで、第二項の被積分関数はωについて奇関数であるから、第二項の積分は零となり、次式を得る。

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(A(\omega)\cos\omega t + B(\omega)\sin\omega t\right)d\omega$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(A(\omega)\cos\omega t + B(\omega)\sin\omega t\right)d\omega$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\tau d\tau\cos\omega t + \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin\omega\tau d\tau\sin\omega t\right)d\omega$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau\right)d\omega \qquad (4.5)$$

------- $f(t)$のフーリエ積分

4.3 フーリエ変換の存在

$f(t)$のフーリエ変換$F(\omega)$が存在するか否かについて、次の定理がある。

【定理】

$f(t)$の絶対積分が収束、すなわち$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$の場合、$F(\omega)$が存在する。

$F(\omega)$は孤立波のスペクトル密度を与え、連続関数である。これに対して、c_nは周期波のスペクトルを与え、離散値をとる。$F(\omega)$を用いてフーリエ逆変換によって$f(t)$を計算すると、$f(t)$が連続な領域では元の関数$f(t)$と一致し、$f(t)$の飛びのある点では$\frac{1}{2}\left(f(t+0)+f(t-0)\right)$となる。

[注意]

飛びのある点におけるフーリエ逆変換の結果については、フーリエ級数の飛びのある点における振る舞いと同様である。

5.フーリエ変換の性質

5.1 代表的な関数のフーリエ変換

(1)δ 関数

δ 関数は次の性質をもつ関数として定義される。

(i) $$\delta(t)=\begin{cases}\infty & (t=0)\\ 0 & (t\neq 0)\end{cases} \tag{5.1}$$

(ii) $$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1 \tag{5.2}$$

(iii)任意の関数 $f(t)$ に対して次の関係が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt=f(0) \tag{5.3}$$

$\delta(-t)=\delta(t)$ であるから δ 関数は偶関数である。

δ 関数のフーリエ変換は次のように求まる。

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=e^{0}=1 \tag{5.4}$$

すなわち、δ 関数のスペクトルは $-\infty$ から ∞ に広がり、かつ振幅は ω によらず一定である。

幅 $2a$、振幅 E の単一矩形パルスで $2aE=1$ を保ったまま $a\to 0$ とした極限が δ 関数と一致する。単一矩形パルス(幅 $2a$、振幅 E)のフーリエ変換は

$$F(\omega)=2aE\frac{\sin a\omega}{a\omega} \tag{5.5}$$

で与えられるので、$2aE=1$ で $a\to 0$ とすると $\dfrac{\sin a\omega}{a\omega}\to 1$ であるから $F(\omega)=1$ となり、確かに上記の結果と一致する。

一方、$F(\omega)=1$ のフーリエ逆変換は δ 関数に一致するはずであるので、

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}d\omega \tag{5.6}$$

と表現される。

(2)直流 $f(t)=E$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}Ee^{-j\omega t}dt=2\pi E\delta(\omega) \tag{5.7}$$

5.2 フーリエ変換の性質

関数 $f(t)$ をフーリエ変換により $F(\omega)$ を求めることを、$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$ と書くことにする。フーリエ変換では次の関係(性質)が成り立つ。

(1)線形性

$$\mathcal{F}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha\mathcal{F}[f_1(t)]+\beta\mathcal{F}[f_2(t)] \tag{5.8}$$

(2)原関数の移動

$$\mathcal{F}[f(t-\tau)]=\exp(-j\omega\tau)\mathcal{F}[f(t)] \tag{5.9}$$

(3)像関数の移動

$$\mathcal{F}\left[\exp(-jkt)f(t)\right]=F(\omega+k) \tag{5.10}$$

(4)時間軸の拡大

$$\mathcal{F}\left[f(At)\right]=\frac{1}{A}F\left(\frac{\omega}{A}\right) \tag{5.11}$$

(5)時間微分

$$\mathcal{F}\left[f^{(n)}(t)\right]=(j\omega)^n\mathcal{F}\left[f(t)\right] \tag{5.12}$$

(6)対称性

$$\mathcal{F}\left[F(t)\right]=2\pi f(-\omega) \tag{5.13}$$