3.フーリエ級数と線形システム

3.1 フーリエ級数の複素表現

オイラーの公式

$$
\begin{aligned}
e^{jx} &= \cos x + j\sin x \\
e^{-jx} &= \cos x - j\sin x
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

を用いて $\cos x$ 、$\sin x$ を exp 関数で表す。(電気工学の慣例で、虚数単位は $\sqrt{-1} = j$)

$$
\begin{aligned}
\cos x &= \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \\
\sin x &= \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

これを、次のフーリエ級数に代入する。

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\frac{2\pi}{T}t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\frac{2\pi}{T}t \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\exp(jn\frac{2\pi}{T}t) + \exp(-jn\frac{2\pi}{T}t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\exp(jn\frac{2\pi}{T}t) - \exp(-jn\frac{2\pi}{T}t)}{2j} \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2j}\right)\exp(jn\frac{2\pi}{T}t) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2j}\right)\exp(-jn\frac{2\pi}{T}t) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n - jb_n}{2}\exp(jn\frac{2\pi}{T}t) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n + jb_n}{2}\exp(-jn\frac{2\pi}{T}t)
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

ここで、a_n、b_n の表現式で n $(n = 1,2,3,\ldots)$ を $-n$ とおくと、次のようになる。

$$
a_{-n} = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(-n\frac{2\pi}{T}t\right)dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt = a_n \tag{3.4a}
$$

$$
b_{-n} = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(-n\frac{2\pi}{T}t\right)dt = -\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt = -b_n \tag{3.4b}
$$

したがって、

$$
c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \tag{3.5}
$$

とおくと、

$$
c_{-n} = \frac{a_{-n} - jb_{-n}}{2} = \frac{a_n + jb_n}{2} \tag{3.6}
$$

となる。これを用いると、式(3.3)の第 3 項は次のように変形することができる。

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n + jb_n}{2}\exp\left(-jn\frac{2\pi}{T}t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\exp\left(j(-n)\frac{2\pi}{T}t\right) = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n \exp\left(jn\frac{2\pi}{T}t\right)
$$

また、$c_0 = \dfrac{a_0 - jb_0}{2} = \dfrac{a_0}{2}$ であるから、式(3.3)は次のようにまとめることができる。

$$
f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(jn\frac{2\pi}{T}t\right) \tag{3.7}
$$

ここで c_n は次の式で与えられる。

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{a_n - jb_n}{2} \\
&= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt - \frac{j}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\exp\left(-jn\frac{2\pi}{T}t\right)dt \qquad (n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)
\end{aligned}
\qquad (3.8)
$$

この c_n を用いて関数 $f(t)$ を式(3.7)のように級数展開することをフーリエ級数の複素表現という。

関数 $f(t)$ が実関数の場合、a_n、b_n は全て実数となり、

$$
c_n{}^* = \frac{a_n + jb_n}{2} = c_{-n}
$$

であるから、式(3.7)は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(jn\frac{2\pi}{T}t\right) \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n \exp\left(jn\frac{2\pi}{T}t\right) + c_{-n}\exp\left(-jn\frac{2\pi}{T}t\right)\right) \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n \exp\left(jn\frac{2\pi}{T}t\right) + \left(c_n\exp\left(jn\frac{2\pi}{T}t\right)\right)^*\right) \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left[c_n \exp\left(jn\frac{2\pi}{T}t\right)\right]
\end{aligned}
$$

$\frac{2\pi}{T} = \omega$ とおけば、

$$
f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left[c_n \exp(jn\omega t)\right] \qquad (3.9)
$$