0.線形システム

線形システム：その動作が、数学的に線形の関数方程式で記述されるシステム。

入力 $f_1(t)$、$f_2(t)$ に対する出力が、それぞれ $y_1(t)$、$y_2(t)$ であるとき、$\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)$ の入力に対する出力が $\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)$ となる系は線形性がある。

A.フーリエ級数 ---> 周期波の展開

・線形システムにおいて、出力の求めやすい関数(正弦関数)の和で、入力 1 を表す。

・各関数を入力とした場合の応答(出力)を求め、その和をとるともとの入力 1 に対する応答(出力)がわかる。

B.フーリエ変換 ---> 非周期波(孤立波)の周波数分析

C.ラプラス変換 ---> 過渡現象の解析

1.フーリエ(Fourier)級数の基礎

・(時間的、空間的に)周期的に変化する現象を数学的に表現 ---> 周期関数

・周期関数を簡単な周期関数(正弦関数)の和で表現する --->フーリエ級数

・時間変数 t の関数 $f(t)$ に対して考える。周期を T とすると

$$f(t)=f(t+nT) \qquad n=0,\pm1,\pm2,\pm3\ldots \tag{1.1}$$

1.1 フーリエ級数展開係数の求め方

$$\begin{aligned}&1,\cos\frac{2\pi}{T}t,\cos 2\frac{2\pi}{T}t,\cdots\cos n\frac{2\pi}{T}t,\cdots\\&\sin\frac{2\pi}{T}t,\cdots,\sin n\frac{2\pi}{T}t,\cdots\end{aligned} \tag{1.2}$$

も周期 T の周期関数である。

$f(t)$ を $\cos n\frac{2\pi}{T}t,\cdots,\sin n\frac{2\pi}{T}t,\ldots$ の関数の和として表現(展開)する。

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\frac{2\pi}{T}t+a_2\cos 2\frac{2\pi}{T}t+\cdots a_n\cos n\frac{2\pi}{T}t+\cdots+b_1\sin\frac{2\pi}{T}t+\cdots b_n\sin n\frac{2\pi}{T}t+\cdots\\&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\frac{2\pi}{T}t+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\frac{2\pi}{T}t\end{aligned} \tag{1.3}$$

ここで、展開係数 $a_0,a_1,\ldots a_n,b_1,\ldots b_n$ は、次のようにして求まる。

(1) a_0 ：式(1.3)の両辺に 1 をかけて、1 周期 $-\dfrac{T}{2}\le t\le\dfrac{T}{2}$ にわたって積分

$n\neq0$ に対して

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos n\frac{2\pi}{T}tdt=\frac{T}{2n\pi}\left[\sin n\frac{2\pi}{T}t\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}=0$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\sin n\frac{2\pi}{T}tdt=\frac{-T}{2n\pi}\left[\cos n\frac{2\pi}{T}t\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}=\frac{-T}{2n\pi}\left(\cos n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}-\cos n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right)=0$$

より

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{a_0}{2}T$$

すなわち、

$$\underline{a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt} \qquad (1.4)$$

(2) a_n ：式(1.3)の両辺に $\cos m\frac{2\pi}{T}t$ をかけて、1 周期 $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ にわたって積分

(2-1)ここで、

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\frac{2\pi}{T}t\cos m\frac{2\pi}{T}tdt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(\cos(n+m)\frac{2\pi}{T}t + \cos(n-m)\frac{2\pi}{T}t\right)dt$$

であるから、

(i) $n \neq m$ なら

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\frac{2\pi}{T}t\cos m\frac{2\pi}{T}tdt = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+m)\frac{2\pi}{T}t}{(n+m)\frac{2\pi}{T}} + \frac{\sin(n-m)\frac{2\pi}{T}t}{(n-m)\frac{2\pi}{T}}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+m)\pi}{(n+m)\frac{2\pi}{T}} + \frac{\sin(n+m)\pi}{(n+m)\frac{2\pi}{T}} + \frac{\sin(n-m)\pi}{(n-m)\frac{2\pi}{T}} + \frac{\sin(n-m)\pi}{(n-m)\frac{2\pi}{T}}\right)$$

$$\because \sin(n \pm m)\pi = 0$$

(ii) $n = m$ なら

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\frac{2\pi}{T}t\cos m\frac{2\pi}{T}tdt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2 m\frac{2\pi}{T}tdt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1+\cos 2m\frac{2\pi}{T}t}{2}dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2m\frac{2\pi}{T}t}{2m\frac{2\pi}{T}}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{T}{2}$$

(2-2)また、

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\frac{2\pi}{T}t\cos m\frac{2\pi}{T}tdt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(\sin(n+m)\frac{2\pi}{T}t + \sin(n-m)\frac{2\pi}{T}t\right)dt$$

であり、

(i) $n \neq m$ なら

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\frac{2\pi}{T}t\cos m\frac{2\pi}{T}tdt = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(n+m)\frac{2\pi}{T}t}{(n+m)\frac{2\pi}{T}} - \frac{\cos(n-m)\frac{2\pi}{T}t}{(n-m)\frac{2\pi}{T}}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(n+m)\pi - \cos(n+m)\pi}{(n+m)\frac{2\pi}{T}} + \frac{\cos(n-m)\pi - \cos(n-m)\pi}{(n-m)\frac{2\pi}{T}}\right) = 0$$

(ii) $n = m$ でも

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\frac{2\pi}{T}t\cos m\frac{2\pi}{T}tdt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2}\sin 2m\frac{2\pi}{T}tdt = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2m\frac{2\pi}{T}t}{2m\frac{2\pi}{T}}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 2m\pi - \cos 2m\pi}{2m\frac{2\pi}{T}}\right) = 0$$

すなわち、関数の直交性

$$\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\frac{2\pi}{T}t\cos m\frac{2\pi}{T}tdt = \begin{cases} 1 & (n = m \neq 0) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$
$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\frac{2\pi}{T}t\cos m\frac{2\pi}{T}tdt = 0 \tag{1.5}$$

を用いると、右辺は $\cos m\frac{2\pi}{T}t$ の項だけが非零で残り、次のように a_m が求まる

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos m\frac{2\pi}{T}tdt = a_m\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2 m\frac{2\pi}{T}tdt = a_m\frac{T}{2}$$

$$\underline{a_m = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos m\frac{2\pi}{T}tdt} \tag{1.6}$$

(3) b_n ：式(1.3)の両辺に $\sin m\frac{2\pi}{T}t$ をかけて、1 周期 $-\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$ にわたって積分

a_n の場合と同様に、次の関数の直交性が成り立つ。

$$\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\frac{2\pi}{T}t\sin m\frac{2\pi}{T}tdt = \begin{cases} 1 & (n = m \neq 0) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \tag{1.7}$$

したがって、

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin m\frac{2\pi}{T}tdt = b_m\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin^2 m\frac{2\pi}{T}tdt = b_m\frac{T}{2}$$

$$\underline{b_m = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin m\frac{2\pi}{T}tdt} \tag{1.8}$$

展開係数 $a_0, a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots b_n$ は式(1.4)、(1.6)、(1.8)で求められる。

$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$ とおいて $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin n\omega_0 t$ と書くこともできる。

ω_0 :基本角周波数、 $n\omega_0$:高調波

[まとめ]

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos n\frac{2\pi}{T}t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin n\frac{2\pi}{T}t \tag{1.9.a}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\frac{2\pi}{T}tdt \qquad (n = 0,1,2,\ldots) \tag{1.9.b}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\frac{2\pi}{T}tdt \qquad (n = 1,2,3,\ldots) \tag{1.9.c}$$

1.2 フーリエ級数展開の例

(1)全波整流 $f(t) = E|\sin\omega t|$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{0}(-E\sin\omega t)\cos n\omega t dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} E\sin\omega t\cos n\omega t dt\right) \\
&= \frac{4E}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{1}{2}(\sin(n+1)\omega t - \sin(n-1)\omega t)dt \\
&= \frac{2E}{T}\left[-\frac{\cos(n+1)\omega t}{(n+1)\omega} + \frac{\cos(n-1)\omega t}{(n-1)\omega}\right]_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{2E}{T}\left(-\frac{\cos(n+1)\pi - 1}{(n+1)\omega} + \frac{\cos(n-1)\pi - 1}{(n-1)\omega}\right) \\
&= \frac{2E}{T}\left(-\frac{(-1)^{n+1} - 1}{(n+1)\omega} + \frac{(-1)^{n-1} - 1}{(n-1)\omega}\right) \\
&= \frac{2E}{T}\left(\frac{(-1)^{n} + 1}{(n+1)\omega} - \frac{(-1)^{n} + 1}{(n-1)\omega}\right) \\
&= \frac{2E}{T}\left((-1)^n + 1\right)\left(\frac{1}{(n+1)\omega} - \frac{1}{(n-1)\omega}\right) \\
&= \frac{2E}{T}\left((-1)^n + 1\right)\left(\frac{-2}{(n^2-1)\omega}\right) \\
&= \frac{2E}{\pi}\frac{(-1)^n + 1}{1-n^2}
\end{aligned}
$$

したがって、n が偶数の場合 $a_n = a_{2m} = \dfrac{4E}{\pi}\dfrac{1}{1-4m^2}$ 、n が奇数の場合 $a_n = 0$

同様に、

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{0}(-E\sin\omega t)\sin n\omega t dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} E\sin\omega t\sin n\omega t dt\right) \\
&= \frac{2E}{T}\left(\int_{\frac{T}{2}}^{0}(\sin\omega t')\sin n\omega t' dt' + \int_{0}^{\frac{T}{2}}\sin\omega t\sin n\omega t dt\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

したがって、

$$
f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m}\cos 2m\omega t = \frac{2E}{\pi} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{4E}{\pi}\frac{1}{1-4m^2}\cos 2m\omega t = \frac{2E}{\pi}\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{1-4m^2}\cos 2m\omega t\right)
$$

(2)半波整流波形

$f(t) = \dfrac{1}{2}\left(E|\sin\omega t| + E\sin\omega t\right)$で表すことができるから、

$$
f(t) = \frac{2E}{\pi}\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{1-4m^2}\cos 2m\omega t\right) + E\sin\omega t = \frac{2E}{\pi}\left(1 + \frac{\pi}{2}\sin\omega t + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{1-4m^2}\cos 2m\omega t\right)
$$

(3)矩形波形

$$f(t)=\begin{cases}-E & \left(-\frac{T}{2}\le t<0\right)\\ E & \left(0\le t<\frac{T}{2}\right)\end{cases}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{0}(-E)\cos n\omega t dt+\int_{0}^{\frac{T}{2}}E\cos n\omega t dt\right)$$
$$=\frac{2E}{T}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{0}\cos n\omega t dt+\int_{0}^{\frac{T}{2}}\cos n\omega t dt\right)=0$$

$$b_n=\frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{0}(-E)\sin n\omega t dt+\int_{0}^{\frac{T}{2}}E\sin n\omega t dt\right)$$
$$=\frac{2E}{T}\left(-\int_{-\frac{T}{2}}^{0}\sin n\omega t dt+\int_{0}^{\frac{T}{2}}\sin n\omega t dt\right)$$
$$=\frac{4E}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}\sin n\omega t dt$$
$$=\frac{4E}{T}\left[-\frac{\cos n\omega t}{n\omega}\right]_0^{\frac{T}{2}}$$
$$=\frac{4E}{T}\left(\frac{-\cos n\pi+1}{n\omega}\right)$$
$$=\frac{4E}{T}\left(\frac{1-(-1)^n}{n\omega}\right)$$

すなわち、n が偶数の場合 $b_n=b_{2m}=0$、n が奇数の場合 $b_n=b_{2m-1}=\frac{8E}{Tn\omega}=\frac{4E}{(2m-1)\pi}$

$$f(t)=\frac{4E}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m-1}\sin(2m-1)\omega t$$