

第13回 機械振動基礎論 補足資料

質問，コメント歓迎しますので，どんどん質問してください。

質問の文章は原文のまま。

Q1 (矩形駆動力を示して)

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 & (t \leq 0) \\ f(t) &= F & (0 \leq t \leq T) \\ f(t) &= 0 & (t > T) \end{aligned} \quad (1)$$

となるので，

$$\begin{aligned} F(s) &= 0 & (t \leq 0) \\ F(s) &= \frac{F}{s} & (0 \leq t \leq T) \\ F(s) &= 0 & (t > T) \end{aligned} \quad \text{講義では, } \frac{F}{s} (1 - e^{-sT}) \quad (2)$$

では何故だめなのですか。(同様2名)

A1 $t > T$ において $f(t) = 0$ であるから， $F(s) = 0$ であるべきだと考える人が複数いるのに驚きました。上の式で通常疑義が生じる所は別の所です。きちんとラプラス変換の定義式に基づいて考えて見ましょう。定義式は

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (3)$$

であり，積分区間は $[0, \infty]$ ですから，本来は，時刻が $0 \leq t \leq T$ の領域で $F(s)$ を定義するということがおかしいのです。式(1)の矩形駆動力に対するラプラス変換は

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^T F e^{-st} dt \\ &= \frac{F}{-s} [e^{-st}]_0^T \\ &= \frac{F}{-s} (e^{-sT} - 1) \\ &= \frac{F}{s} (1 - e^{-sT}) \end{aligned} \quad (4)$$

となるはずですが。しかし， $0 \leq t \leq T$ の時点では，系の応答は $t = T$ で力が零になる影響を受けませんので，この時間内ではあたかも時刻に関係なく $f(t) = F$ であるとしてラプラス変換を求めて良いのです。その場合には

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} F e^{-st} dt \\ &= \frac{F}{-s} [e^{-st}]_0^{\infty} \\ &= \frac{F}{-s} (0 - 1) \\ &= \frac{F}{s} \end{aligned} \quad (5)$$

となります。このことは「現在の事象は未来の事象の影響を受けない」という「因果律」を元に理解できます。駆動波形が正弦関数の1周期分の場合にも、 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ とおいて、本来、

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\
 &= \int_0^T F \sin \frac{2\pi t}{T} e^{-st} dt \\
 &= \int_0^T \frac{-iF}{2} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) e^{-st} dt \\
 &= \int_0^T \frac{-iF}{2} \{e^{(-s+i\omega)t} - e^{(-s-i\omega)t}\} dt \\
 &= \frac{-iF}{2} \left[\frac{1}{-s+i\omega} e^{(-s+i\omega)t} - \frac{1}{-s-i\omega} e^{(-s-i\omega)t} \right]_0^T \\
 &= \frac{-iF}{2} \left\{ \frac{1}{-s+i\omega} e^{(-s+i\omega)T} + \frac{1}{s+i\omega} e^{(-s-i\omega)T} - \frac{1}{-s+i\omega} - \frac{1}{s+i\omega} \right\} \\
 &= \frac{-iF}{2} \left\{ \frac{1}{-s+i\omega} e^{-sT} e^{i\omega T} + \frac{1}{s+i\omega} e^{-sT} e^{-i\omega T} - \frac{1}{-s+i\omega} - \frac{1}{s+i\omega} \right\} \quad (6)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{-iF}{2} \left\{ \frac{1}{-s+i\omega} e^{-sT} + \frac{1}{s+i\omega} e^{-sT} - \frac{1}{-s+i\omega} - \frac{1}{s+i\omega} \right\} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-iF}{2} \left\{ -\frac{1}{-s+i\omega} - \frac{1}{s+i\omega} \right\} \{-e^{-sT} + 1\} \\
 &= \frac{iF}{2} \frac{2i\omega}{-s^2 - \omega^2} \{1 - e^{-sT}\} \\
 &= \frac{F\omega}{s^2 + \omega^2} \{1 - e^{-sT}\} \quad (8)
 \end{aligned}$$

となります。但し、式(6)から式(7)への変形は $e^{\pm i\omega T} = e^{\pm i2\pi} = 1$ の関係式を利用しています。しかし、因果律を考えると、 $0 \leq t \leq T$ においては、 $t > T$ においても正弦波が続いていると見なし、ラプラス変換は

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\
 &= \int_0^{\infty} F \sin(\omega t) e^{-st} dt \\
 &= \frac{F\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (9)
 \end{aligned}$$

として良いのです。

Q2 インパルス応答関数 $h(t)$ の次元は何ですか？

Q2' 任意外力応答 t と τ の違いがいまいちわかりません

t : 観察時間

τ : 注目したインパルスとしての時間

A2 力励振系に対するインパルス応答関数は、 $0 < \zeta < 1$ の場合には

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t \quad (10)$$

また、 $\zeta = 0$ の場合には

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_n} \sin \omega_n t \quad (11)$$

ですので、その次元は $[\text{kg}^{-1}\text{s}]$ です。変位の次元に一致しないことに注意しておいてください。

インパルス応答関数を用いた任意外力応答の式は、講義で説明したように

$$x(t) = \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad (12)$$

ですので、インパルス応答関数の次元 $[\text{kg}^{-1} \text{s}]$ に f の次元 $[\text{kg m s}^{-2}]$ と $d\tau$ の次元 $[\text{s}]$ を合わせて考えれば、変位 $x(t)$ の次元は正しく $[\text{m}]$ となります。

式 (12) は畳み込み積分と言われる積分であり、 t を変位 x を観察している時刻、 τ を入力を短冊に切ったインパルスが作用した時刻、と考えることにより、その式の意味を理解できます。

また、式 (12) において、 $\tau' = t - \tau$ と変数変換をすると、 $\tau = t - \tau'$ 、 $d\tau' = -d\tau$ および $\tau : 0 \rightarrow t$ に対応して $\tau' : t \rightarrow 0$ なので、

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_t^0 h(\tau')f(t-\tau')(-d\tau') \\ &= \int_0^t h(\tau')f(t-\tau')d\tau' \end{aligned} \quad (13)$$

となります。最後に $\tau = \tau'$ と置き換えると、

$$x(t) = \int_0^t h(\tau)f(t-\tau)d\tau \quad (14)$$

とも書けることが分かります。この式はインパルス応答を用いた畳み込み積分による変位応答を計算する式の別形式です。このときには、式 (12) の時とは τ の解釈は異なります。式 (14) の物理的な意味を考えてみると面白いと思います。

Q3 任意外力に対する応答を計算する2つの方法の区別が良く分からなかった。

A3 一言で言えば、(a) ラプラス変換を用いる方法 と (b) インパルス応答を用いる方法 の2通りです。式で書けば、

$$(a) \quad x(t) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} H(s)F(s)e^{st}ds \quad (15)$$

$$(b) \quad x(t) = \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad (16)$$

となります。これらの2つの式で、左辺は同じ応答を表しているので、右辺にも何か関係がありそうです。 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ は

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \quad (17)$$

であり、インパルス応答関数 $h(t)$ のラプラス変換を仮に $L_h(s)$ とおくと

$$L_h(s) = \int_0^\infty h(t)e^{-st}dt \quad (18)$$

と書けることを考慮して、式 (16) の右辺をラプラス変換して逆ラプラス変換すると、

$$(b) \quad x(t) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[\int_0^\infty \left\{ \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau \right\} e^{-st}dt \right] e^{st}ds \quad (19)$$

$$= \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[\int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty h(t-\tau)f(\tau)d\tau \right\} e^{-st}dt \right] e^{st}ds \quad (20)$$

$$= \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[\int_0^\infty f(\tau) \left\{ \int_0^\infty h(t-\tau)e^{-st}dt \right\} d\tau \right] e^{st}ds \quad (21)$$

$$= \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau} \left\{ \int_0^\infty h(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}dt \right\} d\tau \right] e^{st}ds \quad (22)$$

$$= \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau} \left\{ \int_0^\infty h(\eta)e^{-s\eta}d\eta \right\} d\tau \right] e^{st}ds \quad (23)$$

$$= \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[\left\{ \int_0^\infty h(\eta) e^{-s\eta} d\eta \right\} \left\{ \int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right\} \right] e^{st} ds \quad (24)$$

$$= \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} L_h(s) F(s) e^{st} ds \quad (25)$$

と書けます。但し、式 (19) から (20) への変形は $t < 0$ において $h(t) = 0$ という関係を用いて積分範囲を広げています。式 (25) と式 (15) を比較すると重要な関係式

$$\begin{aligned} H(s) &= L_h(s) \\ &= \int_0^\infty h(t) e^{-st} dt \end{aligned} \quad (26)$$

すなわち、「インパルス応答関数 $h(t)$ のラプラス変換は伝達関数 $H(s)$ に等しい」ということが分かります。

Q4 過去の授業中に集まった僕達の振動の学習に役立つ Q&A をいくつか紹介していただけないでしょうか。

A4 この講義の FAQ ということでしょうか。手元に毎年の補足資料の原稿はありますが、毎年講義での説明を改良しているところもあり、必ずしも同じ質問が来ている訳ではありません。それにまず、他人が思いついた疑問に対する答えを聞いて勉強になったと思うのは錯覚でしょう。講義の内容について真剣に自分の問題として捉え、自分が疑問を持つことが重要です。深く考えた質問であれば講義の前半の内容でも歓迎します。