

第12回 機械振動基礎論 補足資料

質問，コメント歓迎しますので，どんどん質問してください．

質問の文章は原文のまま．

Q1 逆フーリエ変換は

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1)$$

ということですが，実際の現象として，負の ω というものがよく分かりません．

A1 常に物理的な視点で物事を理解しようとする姿勢は非常に重要ですので，大変良い質問と思います．上の逆フーリエ変換の式だけを見ると，確かに ω に負の値を代入しているのので，負の角振動数というものを考えているように見えます．では，この式の元になっている複素フーリエ級数の式を見てみましょう．逆にたどっていくと，

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\lambda t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n e^{in\lambda t} + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{in\lambda t} \end{aligned} \quad (2)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-in\lambda t} + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{in\lambda t} \quad (3)$$

であることは講義で説明したとおりです．ここで，式(3)の C_{-n} は C_n の共役な複素数を示している記号であり，負の角振動数とは関係ありません．また， $e^{-in\lambda t}$ について考えると，べき乗の項に負号が付いていますが， n は正の整数であるため角振動数 ω に相当する部分の $n\lambda$ は正です．従って，元々の式では考えている角振動数は全て正となります．

これに対して式(2)の右辺第一項では，べき乗の項の負号を取り込んで n を負の整数としているため，角振動数 ω に相当する部分の $n\lambda$ が負になっています．式(1)では，この式(2)の右辺第一項に相当する部分を，角振動数が負の領域であるとして積分しているわけですが，そもそも，式(3)で第一項に $e^{-n\lambda t}$ が出てくる理由は，「互いに共役な一組の複素数の和で実数を表現する」という数学のテクニックに伴い，第三項の $e^{n\lambda t}$ と対になって出てきたものであることを考えると，式(1)における負の ω というものが，物理的に存在するものとして理解する必要はなく，正の角振動数に対する被積分関数 $F(\omega)e^{i\omega t}$ の値の共役な複素数を計算するための一種の「方便」であることが理解できると思います．また，式(3)の C_{-n} は C_n の関係から，式(1)では $\omega < 0$ のとき $F(\omega)$ は正の角振動数だけの領域で定義される $F(|\omega|)$ の共役な複素数であることが暗に含まれています．