

第11回 機械振動基礎論 補足資料

質問，コメント歓迎しますので，どんどん質問してください．

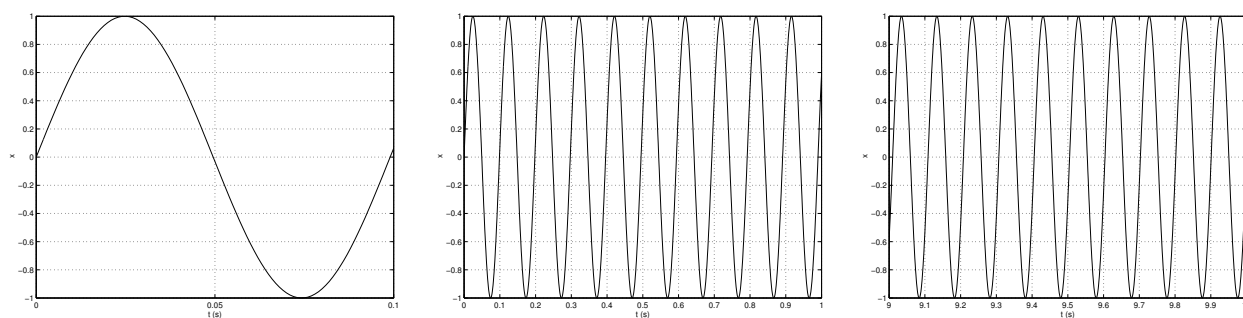
質問の文章は原文のまま．

Q1 周波数の分解能 $\delta f = \frac{1}{T}$ と言っている時の T とはその振動の周期ではないのですか？もしそうであるならばなぜ長く観察すれば分解能が上がるのですか？それとも T は観察時間のことで

A1 良い質問です．しかし測定結果の「振動の周期」をどのようにすれば定義可能でしょうか．下の図 1(a) は振動数 10.1Hz の波形を 0.1 秒だけ観察した結果です．これを見れば，多くの人はこの振動波形の周期は 0.1 秒と判断するでしょう．特に実際の測定結果にはノイズが混入しているので，このような波形から周期 0.1 秒，振動数 10Hz と判断することはそれほどおかしなことではありません．

しかしこの波形を 1 秒間観察した図 1(b) を見ると，波形は 10 周期分と「余り」があることが明確になってきます．さらに 10 秒間観察した図 1(c) では「余り」は完全な 1 周期を構成し，101 周期分の波形が 10 秒間に入っていることが分かります．この結果から，1 つの正弦波に着目すればこの波形の周期は 0.00990099... 秒ですが，一般的に言ってこのような無限小数で表現される「振動の周期」を図 1(a) のような 1 つの波形に着目した測定では決定することはできません．それに対してこの波形は，「10 秒毎に 101 周期分の同じ波形が繰り返される」と見ることができ，その正弦波 1 つ分の周期を 0.1 秒の観察で得た周期よりも高精度に決定することが可能です．

従って，「振動の周期」は絶対的なものでありながら，その観察結果の解釈は観察者によってなされる相対的なものであるため，実際の計測では「自分がどの程度正確に振動数を知ることが必要であるか」＝「必要な振動数分解能はいくらか」ということを考えて，観察時間を決定し，波形が観察時間で完全な周期性を示していないとしても，それを大きく見た波形の周期と同様に考えてやることが重要です．



(a) Observation period 0.1 sec (b) Observation period 1.0 sec (c) Observation period 10 sec

Fig.1 Observed sinusoidal wave

Q2 $C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, $C_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$ と定義していましたが， C_n の n に $-n$ を代入すれば C_{-n} になるということですか？

A2 違います．上の C_n の定義式は添え字が正のときに使用するものであり，添え字が負の時には C_{-n} の定義式を使用するという意味です．

Q3 (1)' の

$$x(t) = \frac{a_0}{2}H(0) + \cdots$$

の式がよくわからなかったです .

A3 今回は一つ一つの式の理解を確認しながらゆっくりと進めていたので , 講義後にこのような質問を頂くのは大変残念です .

講義と異なる説明はできませんが , もう少し丁寧に書くとすれば ,

$$f_{cn}(t) = a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) = \operatorname{Re}\left\{a_n e^{i\frac{2n\pi}{T}t}\right\} \quad (1)$$

に対する応答はコンプライアンス周波数応答関数 $\frac{X(i\omega)}{F} = H(i\omega)$ を使用して ,

$$\begin{aligned} x_{cn}(t) &= \operatorname{Re}\left\{a_n H\left(\frac{2n\pi}{T}\right) e^{i\frac{2n\pi}{T}t}\right\} \\ &= a_n \left[\operatorname{Re}\left\{H\left(\frac{2n\pi}{T}\right)\right\} \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) - \operatorname{Im}\left\{H\left(\frac{2n\pi}{T}\right)\right\} \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

と計算できます . ここではコンプライアンス伝達関数 H の引数の中の虚数単位 i は省略しています . 同様に

$$f_{sn}(t) = b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) = \operatorname{Im}\left\{b_n e^{i\frac{2n\pi}{T}t}\right\}$$

に対する応答は ,

$$\begin{aligned} x_{sn}(t) &= \operatorname{Im}\left\{b_n H\left(\frac{2n\pi}{T}\right) e^{i\frac{2n\pi}{T}t}\right\} \\ &= b_n \left[\operatorname{Im}\left\{H\left(\frac{2n\pi}{T}\right)\right\} \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + \operatorname{Re}\left\{H\left(\frac{2n\pi}{T}\right)\right\} \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) \right] \end{aligned} \quad (3)$$

となります . さらに励振力 $f(t)$ が一定値 $f_0(t) = \frac{a_0}{2}$ であるときの定常変位は , ばね剛性が $k(\text{N/m})$ であることから , $x_0(t) = \frac{a_0}{2} \frac{1}{k}$ となりますが , $\omega = 0$ をコンプライアンス周波数応答関数 $H(i\omega)$ に代入したときの値は $H(0) = \frac{1}{k}$ であることから ,

$$x_0(t) = \frac{a_0}{2}H(0) \quad (4)$$

と書けます . 従って , これらの入力重ね合わせである

$$\begin{aligned} f(t) &= f_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \{f_{cn}(t) + f_{sn}(t)\} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

に対する応答は各々の入力に対する応答の重ね合わせで計算でき ,

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \{x_{cn}(t) + x_{sn}(t)\} \\ &= \frac{a_0}{2}H(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \operatorname{Re}\left\{H\left(\frac{2n\pi}{T}\right)\right\} + b_n \operatorname{Im}\left\{H\left(\frac{2n\pi}{T}\right)\right\} \right] \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) \\ &\quad + \left[-a_n \operatorname{Im}\left\{H\left(\frac{2n\pi}{T}\right)\right\} + b_n \operatorname{Re}\left\{H\left(\frac{2n\pi}{T}\right)\right\} \right] \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) \end{aligned} \quad (6)$$

となります .