2005.11.15

第7回 機械振動基礎論 補足資料

質問，コメント歓迎しますので，どんどん質問してください.

質問の文章は原文のまま.

Q1 実際の振動は，粘性減衰とクーロン摩擦による減衰の両方が働いているということでよいのでしょうか？

A1 まず,「現象ありき」という立場を明確にしたいと思います．実際の現象では接触して互いに相対運動する2つの物体の間には何らかの摩擦が存在し，多くの場合この摩擦により運動のエネルギは熱に変換され，雰囲気中に発散されるので，減衰要素として作用します．このときの摩擦力を相対速度 $\dot{x}$ の関数として調べると，一般的にその概略は図1のようになっています．図1の特徴は

(1) 物体が静止している場合（$\dot{x}=0$) には摩擦力は $f=\pm f_s$ の間の値を取る.
(2) 物体が静止していない場合 ($\dot{x}\neq 0$) には摩擦力の符号は速度の符号と逆である.
(3) 物体がゆっくりと運動している場合 ($|\dot{x}|<\dot{x}_n$）には，速度の絶対値の増加に伴い，摩擦力の絶対値は減少する.
(4) 摩擦力は $\dot{x}=\pm\dot{x}_n$ で極値 $f=\mp f_n$ を取る.
(5) 速度の絶対値が $\dot{x}_n$ よりも大きいが，それほど差が無い領域では，摩擦力 f と速度 $\dot{x}$ は図中 A で表される速度 $\dot{x}=0$ で不連続な1次関数（一般に双線形関数と呼ばれる）で近似できる.
(6) 速度の絶対値が大きい領域では，摩擦力 f と速度 $\dot{x}$ は図中 B で表される傾き $-c$ で原点を通る1次関数で近似できる.

接触面の状況によって実際の系における f_s，f_n，$\dot{x}_n$，c の大きさには違いがありますので，様々な**摩擦のモデル**を考えることができます.

(1) $c\approx 0$，$\dot{x}_n\approx 0$ の場合 → 高校物理で学んだ静止摩擦と動摩擦のモデル．クーロン摩擦または乾燥摩擦とも言う.（図2参照，$f_s=\mu_s N$，$f_n=\mu_d N$，ただし μ_s：静止摩擦係数，μ_d：動摩擦係数，N：抗力）
(2) $f_s\approx 0$，$f_n\approx 0$，$\dot{x}_n\approx 0$ の場合 → 粘性摩擦のモデル．$f=-c\dot{x}$
(3) $\dot{x}_n\approx 0$，$f_s\approx f_d$ の場合，粘性摩擦とクーロン摩擦の両方を合わせたモデル．先週黒板に描いた図になります.

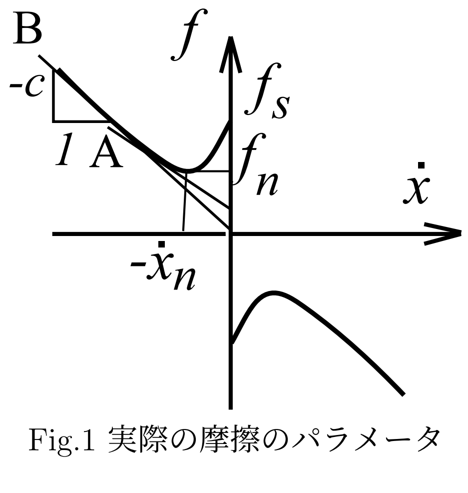

Fig.1 実際の摩擦のパラメータ

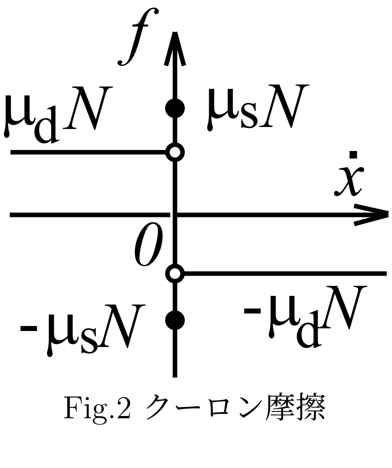

Fig.2 クーロン摩擦

これらの摩擦のモデルはあくまでも**モデル**ですので，ご質問の文章の「実際の系に粘性減衰とクーロン摩擦による減衰の両方が働いている」という認識は厳密でなく,「実際の系に作用する摩擦は粘性摩擦とクーロン摩擦の両方を合わせたモデルで近似的にモデル化できる」ということであれば，多くの場合成立している可能性があります.

なお，粘性摩擦を説明する際に流体抵抗に関連付けて説明をしましたが，粘性摩擦でモデル化できるような摩擦は流体が明白に介在しない接触面でも存在し，玉軸受けの摩擦トルクなどにおいても速度に比例した項が出てきます.

また，図 1 で $|\dot{x}| < \dot{x}_n$ の領域で $-c' = \frac{df}{d\dot{x}} > 0$ となっている領域は第 6 回の講義で説明した動的不安定を引き起こす領域です.

Q2 クーロン摩擦のグラフの振幅 $-A + 2\frac{F_L}{k}$，$A - 4\frac{F_L}{k}$ がよく分かりません.

A2 速度が負 $(\dot{x} < 0)$ のとき，釣り合いの位置が $x = \frac{F_L}{k}$ の自由振動をしますので，初期位置が $x = A$ であっても，自由振動の振幅は $A - \frac{F_L}{k}$ となります．このとき最小値は釣り合いの位置から振幅を引けば良いので,

$$\frac{F_L}{k} - (A - \frac{F_L}{k}) = -A + 2\frac{F_L}{k}$$

となります．次に速度が正 $(\dot{x} > 0)$ のときには釣り合いの位置が $x = -\frac{F_L}{k}$ となり，切り替わったときの変位は $-A + 2\frac{F_L}{k}$ ですが，自由振動の振幅としては $A - 2\frac{F_L}{k}$ よりも $\frac{F_L}{k}$ だけ小さい $A - 3\frac{F_L}{k}$ となります．このときの自由振動の最大値は釣り合いの位置に振幅を足せばよいので,

$$-\frac{F_L}{k} + (A - 3\frac{F_L}{k}) = A - 4\frac{F_L}{k}$$

となります.

Q3 Step1 $\frac{F_L}{k}$ はどうやって求めるんですか？

A3 A2 で示したように変位の極大値は 1 周期で $4\frac{F_L}{k}$ ずつ減っていきます．したがって，測定した変位応答の隣り合う極大値の差を 1/4 すれば $\frac{F_L}{k}$ が求められます.

Q4 「非同次方程式の一般解=同次方程式の一般解+非同次方程式の特解」の理由が分かりません．そういうものだと思って暗記すべき内容ですか？

A4 まず，一般解と特解の用語についてはウィキペディアの記述を引用しましょう.「微分方程式や差分方程式の解の多くは、積分定数などの任意定数や、任意関数を含む形で記述されることが多い。例えば、n 階の常微分方程式であれば n 個の積分定数を持つ。このように、任意定数や、任意関数を含む形で書かれる解の事を 一般解という。 一般解に含まれる任意定数や、任意関数に特定の値や関数を与えることによって得られる解、即ち、一般解に含まれる個々の解のことを特殊解或いは特解という。」

以上をベースとして，まず，非同次線形微分方程式

$$G(x(t)) = f(t)$$

の特解を $x(t) = x_n(t)$ と表記すると

$$G(x_n(t)) = f(t) \tag{1}$$

が成立します．しかし，$f(t) = 0$ とした同次線形微分方程式

$$G(x(t)) = 0$$

を満たす一般解 $x(t) = x_h(t)$ は同次線形微分方程式を満たすので,

$$G(x_h(t)) = 0 \tag{2}$$

が成立します．そこで，同次方程式の一般解に非同次微分方程式の特解に加えた解

$$x_{all}(t) = x_h(t) + x_n(t)$$

考え，元の非同次線形微分方程式に代入すると,

$$\begin{aligned} G(x_{all}(t)) &= G(x_h(t) + x_n(t)) \\ &= G(x_h(t)) + G(x_n(t)) \\ &= 0 + f(t) \\ &= f(t) \end{aligned} \tag{3}$$

となるため，非同次線形微分方程式の解となっていることが確認できます．つまり，非同次方程式の解としては，非同次線形微分方程式の特解だけでは不十分であり，同次線形微分方程式の一般解を加えてやる必要があるのです.

Q5 (B) 加振のとき何故 ω_n が出てくるのですか？

A5 調和励振力が作用する系の応答を考えるとき，系は角振動数 ω の調和励振力によって強制的に加振されているので，その振動の振動数は ω_n とは無関係です．皆さんも任意の振動数で振動系を振動させることが可能であることが想像できるでしょう．しかし皆さんが想像している振動は，振動数の変化を考えたとしてもある一定の振動振幅で振動させているのであり，振動数に依存しない**一定の振幅の力**で振動をさせた場合を想像することは困難です.

一定振幅の力による励振による振動の**振幅**は，講義中に式で示したように加振角振動数 ω と固有角振動数 ω_n の関数になっています．言い換えれば振動数によって振動のしやすさ，しにくさがあるのです．皆さんは実生活でこのような現象を体験したことは無いでしょうか？

Q6 (力励振を受ける不減衰一自由度振動系の図を示して) $f = F_a \sin \omega t$ "F_a" はなんの力ですか？

A6 "F_a" は調和励振力の振幅です．実際の系でこのような調和励振力を与える例を考えると，不釣合いを持ったロータなどが考えられますが，調和励振力に対する応答解析は任意外力に対する応答解析の基礎になるため，実際に調和励振力を受ける系そのものにこだわることはあまり重要ではありません.