2005.11.8

第６回 機械振動基礎論 補足資料

質問，コメント歓迎しますので，どんどん質問してください．

質問の文章は原文のまま．

Q1 $\zeta = 1$ のときの特解が従属，独立とはどういうことですか？この場合従属ではなくて独立ということでいいんですね．(同様１名)

A1 １年次の微分積分学の知識と思いますが，解説します．まず，微分方程式の解に関して以下の定理があります．

定理：同次線形常微分方程式の一般解は微分方程式の階数と同じ数の互いに線形独立な特解の線形和で表される．

　ここで n 個の関数 F_i $(i = 1 \sim n)$ が互いに線形独立であるとは，全ての F_i に対して

$$F_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} C_j F_j \tag{1}$$

を満たす C_j の組が存在しないことを言います．また関数 F が関数 F_i の線形和で表されるとは

$$F = \sum_{i=1}^{n} C_i F_i \tag{2}$$

となる C_i の組が存在することを言います．

　今考えている一自由度減衰振動系の挙動を表す微分方程式（運動方程式）の階数は２階ですので，一般解は２つの互いに線形独立な特解の線形和で表されます．例えば，不減衰一自由度振動系の場合，運動方程式は

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

であり，その特解は $\omega_n = \sqrt{k/m}$ として

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \cos \omega_n t \\ x(t) = C_2 \sin \omega_n t \end{cases} \tag{3}$$

または

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{i\omega_n t} \\ x(t) = C_2 e^{-i\omega_n t} \end{cases} \tag{4}$$

としました．あまり意味はありませんが，線形独立な２つの特解を選べばいいので，

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \cos \omega_n t \\ x(t) = C_2 e^{-i\omega_n t} \end{cases} \tag{5}$$

とすることも可能です．

　さて，減衰一自由度振動系での場合には特性方程式の解（固有値）が

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{6}$$

で表され，一般に特解を

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ x(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \tag{7}$$

としすが，臨界減衰（$\zeta = 1$）の場合には，

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_n$$

となってしまい，式 (7) に代入すると，

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-\omega_n t} \\ x(t) = C_2 e^{-\omega_n t} \end{cases} \tag{8}$$

となり，式 (8) の 2 つの特解が互いに線形独立になりません．これは 2 つの特解は互いに従属であると言い換えることもできます．

2 つの線形独立な特解を選択するために，任意の関数の中から，私は

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-\omega_n t} \\ x(t) = C_2 t e^{-\omega_n t} \end{cases} \tag{9}$$

を特解の候補として選択しました．式 (9) の上の式が与えられた微分方程式の特解であることは容易に分かると思いますが，講義では下の式が特解になっていることを示すために，与えられた微分方程式に代入して微分方程式が成立することを示しました．

Q2 臨界減衰のときの運動がいまいちわからない．行き過ぎが発生するところで静止する？

A2 静止しません．時間が無限に経てば静的平衡点に戻ります．

Q3

$$x = e^{-\zeta\omega_n t}\{(C_1 + C_1^*)\cos\omega_d t + i(C_1 - C_1^*)\sin\omega_d t\}$$

$x \in \Re$ となったとき，$C_1 = C_1^*$ だと思って解決しようとしてしまったのですが，それではなぜだめなのですか？

A3 $C_1 = C_1^*$ とすると，一般解は

$$x(t) = 2C_1 e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_d t \tag{10}$$

となりますので，C_1 が複素数とすれば，x も複素数になってしまい不適です．

C_1 を実数とすれば x は実数となりますが，式 (10) より，

$$\dot{x}(t) = -2C_1 e^{-\zeta\omega_n t}(\omega_d \sin\omega_d t + \zeta\omega_n \cos\omega_d t) \tag{11}$$

となるため，常に $\dot{x}(0) = -2\zeta\omega_n C_1$ となり，任意の初期条件を有する解を表すことができません．したがって，C_1 を複素数として，C_1^* は C_1 の共役な複素数とする必要があります．

このことは Q1 の微分方程式の解の問題にも関係しています．微分方程式の一般解には,「一般解に含まれる微分方程式の階数と同じ個数の定数を適切に選択することにより，任意の解を表すことができる.」性質が必要です．C_1 を実数として $C_1 = C_1^*$ とすると，x は実数になりますが，1 つの定数しか選択していないため，任意の解を表すことができなくなっています．それに対して C_1 を複素数として，C_1^* は C_1 の共役な複素数とすれば，C_1 の実部および虚部の 2 つの定数を適切に選択することができるため，全ての解を表すことができるようになるわけです．

Q4 減衰の最適値とはなんなのでしょうか？
Q4' サーボ系の減衰の最適値はどのように決定するのか？

A4 減衰の最適値について講義では
(1) 外力応答を想定する場合：外力による振動は小さければ小さいほど良い．
減衰は大きければ大きいほど良い．
(2) サーボ系の場合：追従誤差は小さい方が良いが，即応性も必要．
最適な減衰比は $\zeta = 0.7$ である．
と説明しました．サーボ系の減衰については，減衰が小さいといつまでも振動が続いて誤差が小さくならないが，減衰を高めると誤差を小さくする動きに対してもブレーキが掛かってしまうので，減衰比には最適値があることが予想できますが，応答の一例を図に示したので，見てください．この図の変位を誤差と考えると，図 (b) において $\zeta = 0.7$ が一番早く 0 に近づいていることが分かります．この図は一例に過ぎず，$\zeta = 0.7$ の説明には別の解釈もありますが，それについては後ほど説明します．

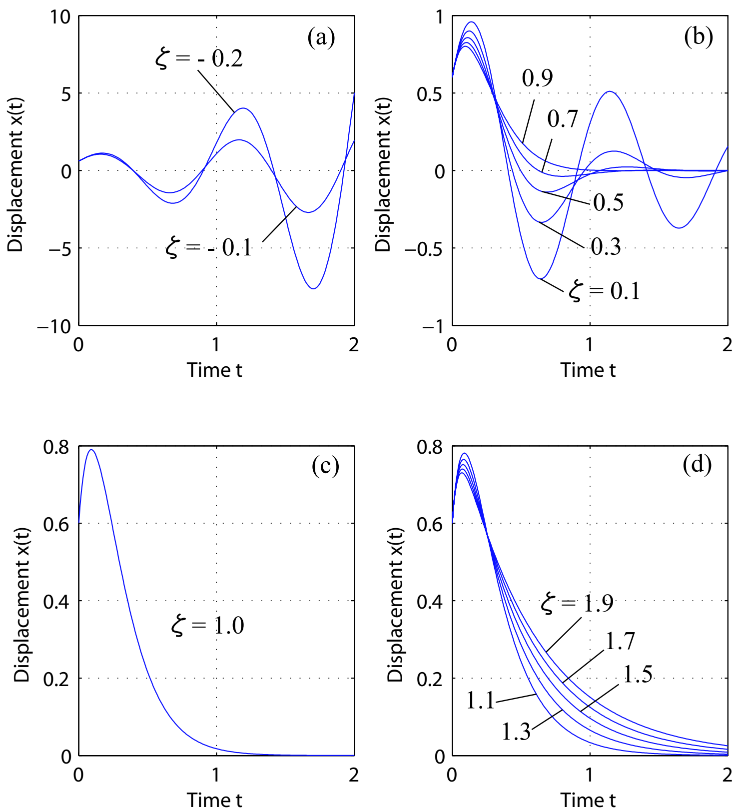

Figure Initial value responses with various damping ratio

Q5 $\zeta < 0$ $(C < 0)$ とはどんな場合か？(同様多数)

A5 タコマ橋の崩落を調査レポートに選んでくれた人もいましたが，タコマ橋は非周期的 (振動的ではない) 風の流れによって励起された橋の曲げとねじりの振動が連成して負の減衰の効果により振動が大きくなり，ロープが切断されて崩落に至ったケースです．身近なところでは自転車のリムブレーキの振動やディスクブレーキの鳴きなど，一方向の入力によって生じる振動の多くがこの動的不安定に起因する振動ですが，振幅が大きくなると減衰が正になる性質 (系の非線形性) もあるため，振幅が無限大にはなりません．また，マイクとスピーカーのハウリングなども特定の振動数に対して音響系が負の減衰効果を持つことで生じる現象です．