

第5回 機械振動基礎論 補足資料

質問，コメント歓迎しますので，どんどん質問してください．

質問の文章は原文のまま．

Q1 レーリー法以外にも固有角振動数を求める方法はあるのでしょうか．

A1 一番最初に勉強した固有角振動数の計算方法

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

も立派な固有角振動数の計算方法ですが，最も精度の低い計算方法といえるでしょう．レーリー法は次に精度の低い計算方法です．一様断面のはりなどに対しては厳密解が存在しますが，一様断面ではないものに対しては一様断面で近似することになり精度の低い近似解となります．複雑な形状や材質の変化する部品などの組み合わせた物体の固有振動数を計算する方法としては有限要素法がよく使われています．有限要素法は3年次の講義で勉強します．

Q2 直動ばねの線密度はコイルが巻いている状態での単位長さの密度ですか，または，素線の密度ですか？(原文には絵が描いてあるが，文章に変換した)

Q2' わざと無視していると思うのですが，ばねの上部の不完全ばね部(原文では図)が動く分のエネルギーは考えないのでしょうか？

Q2'' (前略)どの程度理想的に実在のばね(の最大速度)が $\frac{\xi}{L}\omega_n X$ を満たすものなのか．

A2 コイルが巻いてある状態で，かつ，釣り合いの状態にある場合の単位長さです．レーリー法は近似解法に過ぎませんので， ρL で，不完全ばね部をも含むばね全体の重さを表していると考えて結構です．また，仮定したモード形の確からしさについては厳密解と比較してみる他ありませんが，多くの場合，モード形の正確さよりも固有振動数の正確さのほうが問題になります．コイルばねのように厳密解が存在しない場合には有限要素法などの解析結果と比較することになりますが，固有振動数は数%の誤差で一致していることが確認できると思います．

Q3 (ばねの質量を考慮して)運動方程式を考えると

$$m\ddot{x} + (\rho d\xi) \int_0^L \left(\frac{\xi}{L} \ddot{x} \right) = -kx$$

となりませんか？

A3 大変良い質問です．質量 m の加速度が \ddot{x} であるとき，位置 ξ にある質量 $\rho d\xi$ の微小要素の加速度は $\frac{\xi}{L}\ddot{x}$ ですので，全慣性力は

$$m\ddot{x} + (\rho d\xi) \int_0^L \left(\frac{\xi}{L} \ddot{x} \right)$$

になりそうですね．これを質量に作用しているばね力と等しいとおけば質問者が書いている式になります．質問者の運動方程式を変形すると，

$$\left(m + \frac{\rho L}{2} \right) \ddot{x} = -kx$$

となることから，ばねの質量を考慮した固有角振動数は

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{\rho L}{2}}} \quad (1)$$

となり，講義中にレーリー法で求めた結果

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{\rho L}{3}}} \quad (2)$$

とは異なります．これはどうしたことでしょうか？

この矛盾を解決するために，原点に立ち戻って，質量の位置で δx となる仮想変位に対する仮想仕事を考えて見ましょう．位置 ξ にある質量 $\rho d\xi$ の微小要素の仮想変位は $\frac{\xi}{L}\delta x$ となるので，ダランベールの原理を用いて仮想仕事を計算し，それを零とおくと次式となります．

$$m\ddot{x}\delta x + \rho d\xi \int_0^L \left(\frac{\xi}{L}\ddot{x}\right) \frac{\xi}{L}\delta x + kx\delta x = 0$$

この式より，

$$\left\{ m\ddot{x} + \rho \int_0^L \left(\frac{\xi}{L}\ddot{x}\right) \frac{\xi}{L} d\xi + kx \right\} \delta x = 0$$

となりますので，得られた運動方程式は

$$m\ddot{x} + \rho \int_0^L \left(\frac{\xi}{L}\right)^2 d\xi \ddot{x} + kx = 0 \quad (3)$$

となり，固有角振動数はレーリー法で求めたものと同じ

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{\rho L}{3}}} \quad (4)$$

となります．すなわち，質問者が提起してくれた大変高度な間違いは，多くの部材の「仮想仕事」は足してよいが，「慣性力」自体は足してはいけないことを意味しています．

Q4 減衰係数 c の単位は Nm/s ではなく， Ns/m ではないですか？(同様 1 名)

A4 はいご指摘の通りです．黒板で描き間違えました．気付かなかった人はノートを直しておい
てください．

Q5 ギリシャ文字の書き方が分かりません．

A5 私も自己流で書いていましたが，web サイト

<http://www.tomakomai-ct.ac.jp/departament/gene/apmath/p6.html> などが参考になると思
います．

Q6 数学では角度は π を使って表す習慣でしたが，機械の分野では 180° と表すのですか？(中
略) また， $\sqrt{2}$ とは答えずに， $1.414\cdots$ で有効数字を考慮して 1.41 などと答えなければならない
のですか？

A6 「ラジアン」(単位 rad) は SI における角度の単位となっていますが，「度」(単位 $^\circ$ または
 deg) も角度を表す単位として用いてよいことになっています．実際の計算では $20\pi\text{Hz}$ などと言
われても実際の振動数と結びつかないので，適当な有効桁を取って， 62.8Hz などとします．無理
数についても同様です．