2005.10.25

第4回 機械振動基礎論 補足資料

質問，コメント歓迎しますので，どんどん質問してください．

質問の文章は原文のまま．

Q1 傾斜振り子と地震計の話がよくわかりませんでした．
Q1' 傾斜振り子 どの方向に振動するのかわからない．
A1 ネットで調べてみてください．例えば
http://www.s-yamaga.jp/nanimono/chikyu/jishin-01.htm などが参考になります．

Q2 (1) $|\theta| \leq ?$ $\leftarrow$ これが見えない
(2) $\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}}$ はなんで？
(3) 振り子と振子のちがいは？
(4) 途中の5分間の休けいはいらないのでは？
(注：箇条書き番号は山浦が付した)

A2 質問の文章が小学生レベルです．もう少し大学生らしい日本語を使ってもらいたいと思います．質問の内容も講義時間中にその場で確認すべき内容が多いと思いますが，お答えします．
(1) $\sin\theta \approx \theta$ と考えられる角度です．黒板には $|\theta| \leq \frac{\pi}{6}$ rad と書いた気がします．
(2) 線形化された単振り子の運動方程式

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

に対して，$\theta = \theta_0 \exp\left\{\pm i\sqrt{\frac{g}{l}}\right\}$ が特解となっているので，

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{1}$$

が固有角振動数となります．また，通常のばね-質量からなる1自由度振動系の自由振動の運動方程式は

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

と書け，このときの固有角振動数は

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

となることから，類似性を考慮すれば単振り子の固有角振動数が式(1)となることは明白です．
(3) 「振り子」は「ふりこ」としか読みませんが,「振子」は「ふりこ」とも「しんし」とも読み,「ふりこ」は和語,「しんし」は漢語という違いだけで同じものを意味しています．確実に「ふりこ」と読ませたい場合には「振り子」と表記することをお勧めします．
(4) 貴重なご意見ありがとうございました．適切に判断します．

Q3 複振り子の形状 | 絵 | がよく分かりませんでした．
Q3'　単振り子の運動方程式はなんとなく分かるのですが，　，　の方程式の意味が分かりません．I_o や I_G の意味がわからないのです．

A3 複振り子の形状は一般的な剛体と言う意味で，特定の図形に定まらないような形状を絵に描いています．また，I_o は回転軸 o 周りの慣性モーメント，I_G は質量中心 G 周りの慣性モーメントです．慣性モーメントの単位は kgm^2 です．慣性モーメントについては 1 年次の工業力学の復習をしてください．この講義では，回転軸周りの角変位 θ(rad) および物体に作用する全モーメント T(N) を定義すれば，天下り式に

$$I_o\ddot{\theta} = T$$

で運動方程式が導けるとしています．

Q4 倒立振子のばねによるモーメントがよく分かりませんでした．
Q4' てこばねのねじり方，k_t が分からなかった．

A4 下の図を参考にしていただけば分かると思いますが，倒立振子のばねとてこばねは向きは違いますが，同じものです．てこばねを直線振動のばね要素としてみたときには，微小振動を仮定して復元力の方向が変位 x の大きさで変化する効果は無視しました．同様に倒立振子のばねによる復原モーメントを求める際にも力の方向の変化を無視します．

てこばねの図と倒立振子の図では記号の定義が異なっているので，倒立振子の図で説明します．倒立振子の角変位 θ に対してばね位置における変位を x と定義し，変位として円弧長さを考えれば $x = l_1\theta$ であり，復原力は $f = -kx = -kl_1\theta$ となります．力の方向の変化を無視して，復原モーメントに直せば $T = l_1 f = -kl_1^2\theta$ となります．

また，釣り合い状態にあるばねの長さが無限大のとき，ばね位置における変位は $x = l_1 \sin\theta$ となり，復原力 $f = -kx = -kl_1 \sin\theta$ となります．力の方向の変化を無視して，復原モーメントに直せば $T = l_1 f = -kl_1^2 \sin\theta$ となり，角変位 θ を微小として $\sin\theta \approx \theta$ と置き換えればこの場合も復原モーメントは $T = -kl_1^2\theta$ とかけます．

さらに，復原モーメント $T = -kl_1^2\theta$ と等価ねじりばねによる復原モーメント $T = -k_t\theta$ を比較して，等価ねじりばね剛性 k_t を求めれば，$k_t = kl_1^2$ となります．左のてこばねの図の記号の定義を用いれば $k_t = k_1L^2$ です．

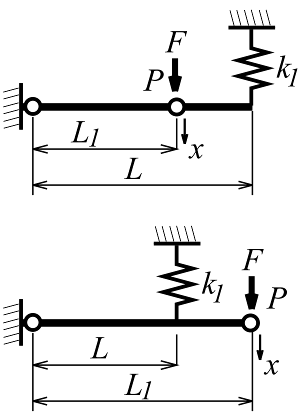

図 てこばね

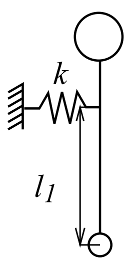

図 倒立振子

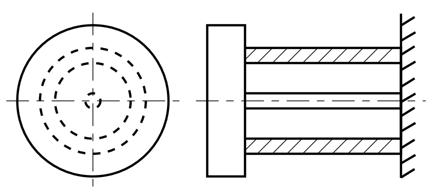
図 複合ねじりばね

Q5 (上記 複合ねじりばねの図 (山浦が一部加筆) を示して) つつと棒が円盤についているのをまわすのは並列のねじりばねですか．

A5 面白い構造を考えましたね．おっしゃるとおり並列のねじりばねです．

Q6 静的不安定の物理的な意味がよく分からなかった．

A6 本来，安定，不安定と言うのは平衡点の持つ性質です．ばねを持たない単振り子は真下と真上の 2 箇所の平衡点を持っていますが，真上の平衡点は僅かでも平衡点からずれた初期角変位を与えると平衡点には戻れず，初期角変位の方向に角変位が増大してもう一つの平衡点である真下の位置に行こうとします．このように平衡点からの僅かなずれに対して時間が十分に経過した後の変位が零にならない平衡点を「不安定な平衡点」と言います.「静的不安定」とは不安定となる原因が「負の剛性」に起因するものを言うことまでは講義で説明しました．

ご質問を頂いたと言うことは「負の剛性」というのが分かり難かったでしょうか？それでは剛性による復原力について考えて見ましょう．復原力はポテンシャルに起因した力 (ポテンシャル力) であり，ポテンシャルを U とすれば，復原力 f は

$$\text{変位を}\,x\,\text{とすれば}\; f=-\frac{dU}{dx},\quad \text{変位を}\theta\text{とすれば}\; f=-\frac{U}{d\theta}$$

で求められます．これまで出てきた 3 つの平衡点についてこれを調べてみると以下の表のようになります．

平衡点	ポテンシャル	復原力
ばねの平衡点近傍	$U=\frac{1}{2}kx^2$	$f=-kx$
振り子の真下の平衡点近傍	$U=mgL(1-\cos\theta)$	$f=-mgL\sin\theta$
振り子の真上の平衡点近傍	$U=mgL(\cos\theta-1)$	$f=mgL\sin\theta$

いずれの場合にも平衡点（$x=0$ または $\theta=0$）では復原力 f は零なので，平衡点におけるポテンシャルの 1 階微分の大きさは零です．しかしポテンシャルの 2 階微分の正負は場合によって異なり，2 階微分が負である場合（ポテンシャルが上に凸の場合）には静的に不安定です．

すなわち，静的不安定とは凸な山の頂上に球を置くのと同じような状況です．うまくバランスを取れば山の頂上に球を置くことができるかもしれませんが，僅かでもバランスが崩れれば球は谷（安定な平衡点）に落ちてしまいます．これが静的不安定の正体です．

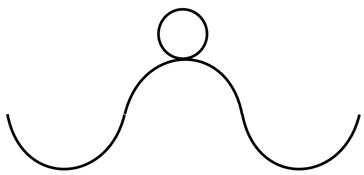

図 ポテンシャルの山と谷

Q7 完全すべりと言うのは摩擦も無視したものをいうのですか．

A7 完全すべりの場合には摩擦を無視しています．

Q8 $\frac{dU}{dt}=mg(R-r)\sin\theta\dot{\theta}$ となるのが分からなかった．

A8 重力によるポテンシャルエネルギ $U=mg(R-r)(1-\cos\theta)$ ですので，合成関数の微分の公式

$$\frac{dU}{dt}=\frac{dU}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

を用いて計算すると，

$$\frac{dU}{dt}=mg(R-r)\sin\theta\dot{\theta}$$

となります．