第 8 回　ネットワーク計画法 III
— 最小費用流問題 —

8.1　最小費用流問題とは

最小費用流問題:　図 8.1 に与えられたネットワークにおいて，全ての節点における需要量・供給量を満足しつつ，コストを最少にするにはどうしたらよいか.（枝に与えられた値＝ (コスト，容量)，節点に与えられた値＝供給量（正），需要量（負)）

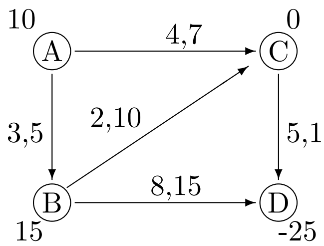


図 8.1: 枝と節点に値が与えられているネットワーク

与えられたグラフ（ネットワーク）$G = (V, E)$ において，枝 $(i, j) \in E$ に対して，輸送コストを $c_{i,j}$，容量を $u_{i,j}$ とし，節点 $i \in V$ に対して需要･供給量を b_i とする．ただし，$b_i > 0$ はその節点の供給量が b_i であることを示し，$b_i < 0$ はその節点の需要量が $|b_i|$ であることを示す．従って，$b_i = 0$ ならば節点 i は通過節点で，$b_i < 0$ ならば________，$b_i > 0$ ならば________である．最小費用流問題は，枝 (i, j) 上に輸送する量を変数 $x_{i,j}$ として，次のように定式化できる．

$$\text{目的関数：}\quad \sum_{(i,j)\in E} c_{i,j} x_{i,j} \;\rightarrow\; \text{最小化}$$

$$\text{制約条件：}\quad \sum_{(v,j)\in E} x_{v,j} - \sum_{(i,v)\in E} x_{i,v} = b_v \quad (\forall v \in V)$$

以下では，最少費用流問題の 2 つの解法について簡単に説明する．

8.2 バサッカー・ゴーウェン法

供給点（ソース）と需要点（シンク）が１つずつ存在し，他の節点は全て通過点であるネットワークに対する最小費用流問題を考えよう．

最小費用流問題では，ソースからシンクまでの路で費用が最少であるものに，できるだけ多く流すようにすればよい．このような方針から最小費用流を求める方法を，考案した人の名前から**バサッカー・ゴーウェン法**という．手順の概略は以下の通り．

バサッカー・ゴーウェン法

(Step 1) まず，各枝コストを長さと考えて，ソースからシンクまでの最短路を求める（最短路問題）．求まった路が，単位流量あたり最も安く流せる経路である．そこに，流せるだけ流す.（流せる最大量＝ ____________________）

(Step 2) フロー増加法と同様に，得られたフローに対して残余ネットワークを作る．このとき，残余容量は以前と同様に考え，枝のコストについては，反対むきの枝については**マイナスの値**とする．

(Step 3) 残余ネットワークに対して，コストを長さと考えて，最短路を求める（負の長さを持つ枝が存在する最短路問題）．求まった路が，増加路の中で最小コストの経路.

(Step 4) 最短の増加路に流せるだけ流し（経路上の最小容量分のフローを追加），流量が増加したフローを得る．流量が必要な容量に達したら終わり．そうでなければ，Step 2 に戻る．

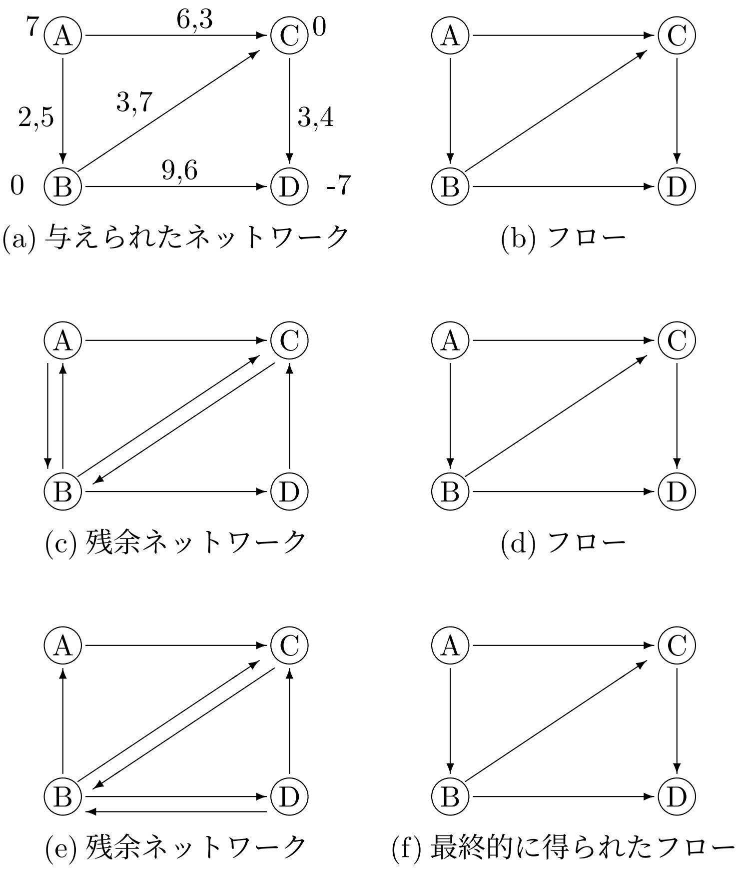
例として，図 8.2(a) で示すネットワークを考えてみよう．ソースとシンクはそれぞれ節点 A と D．枝に与えられた数値は（コスト，容量）．

(1) A から D への最短路は ($A \rightarrow$__________) で長さは ___．これは，この経路で１単位流すとコストが ___ かかることを意味している．この路上の最小容量は ___．よって，図 8.2 の (b) のフローが得られる．

(2) この時点での流量は必要な流量 7 より小さい．そこで，残余ネットワークを作る（同図 (c)）．

(3) 最短路を求めると，($A \rightarrow$__________) で長さは ___．この路上の最小容量は ___．よって，同図 (d) のフローが得られる．

(4) まだ流量が足りないので残余ネットワークを作る（同図 (e)）．



(a) 与えられたネットワーク　(b) フロー
(c) 残余ネットワーク　(d) フロー
(e) 残余ネットワーク　(f) 最終的に得られたフロー

図 8.2: バサッカー・ゴーウェン法による解き方

(5) 最短路を求めると，(A →__________) で長さは ___．この路上の最小容量は ___．しかし，流せるだけ流すと必要量をオーバーしてしまうので，増加路にそって ___ だけ流量を追加する．よって，同図 (f) のフローが得られる．これが最小費用流となっている．

[**課題 8.1**] 図 8.3 に与えられたネットワークにおいて，節点 A をソースから節点 D をシンクとし流量 7 を流したい．ただし，枝に与えられた値は（フロー１単位当りのコスト，容量）である．最小費用流をバサッカー・ゴーウェン法を用いて求めよ．

（(a) 各枝の長さをコストをとし，A から D までの最短路問題をダイクストラのアルゴリズムを使って求める．(b) 得られたフローの残余ネットワークを作る．(c) 残余ネットワークにおける最短路を求める．ここでは考えうる全ての路についてコストを計算し比較すればよい．(d) 必要な流量が得られるまで繰り返す.）

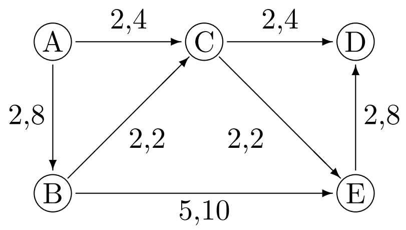


図 8.3: 枝と節点に値が与えられているネットワークその 3

8.3 クライン法（負閉路除去法）

最小費用流問題の別の解法として，全ての制約条件（流れ保存則，容量制約条件）を満たすフローが分かっているとし，それを初期フローとして費用の最小化をする方法がある．

得られているフローに対する残余ネットワークを考える．(バサッカー・ゴーウェン法で説明したように，反対向きの枝のコストは ________________ とする.）残余ネットワークの中に，**長さが負の閉路**が存在するとしよう．このような閉路を __________ という．長さはその路に単位流量を流したときの ________ であるから，負閉路に沿ってフローを追加すると，総コストは ________________ ことに注意．また閉路であるから，フローを追加しても流量は ________________.

このような性質を利用した**クライン法**の手順は以下のとおり．

クライン法

(Step 1) 流れ保存則，容量制約条件を満たすフローに対して，残余ネットワークを作る．

(Step 2) 残余ネットワークに対して負閉路を探す．なければ終了．

(Step 3) 負閉路に沿ってフローを流す．流す量は __________________________．(総流量は変わらず，流れ保存則，容量制約条件は満たされている.）Step 2 にもどる．

たとえば，図 8.4(a) にクライン法を適用してみよう．初期フローとして，図 8.4(b) が得られているとする．

(1) 初期フローに対する残余ネットワークは同図 (c) となる．すぐに分かるように，_____ __________ や ________________ は負閉路になっている．

(2) たとえば $(A \to B \to C \to A)$ に着目すると，最小の残余容量は ___ であるから，フローを変更すると，同図 (d) のフローが得られる．

(3) これに対する残余ネットワークは同図 (e) となり，__________ は負閉路になって

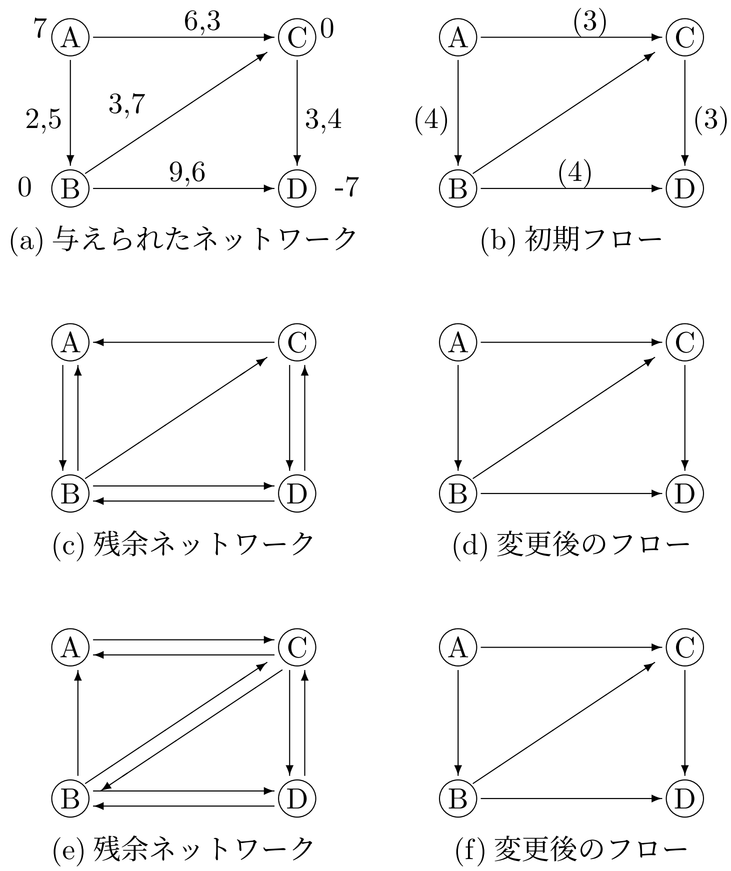


図 8.4: クライン法による解き方

いる．

(4) これにそって最小容量の分だけさらにフローを変更すると，同図 (f) が得られる．

それぞれのフローの費用を計算すると，初期フロー（図の (b)）では _____，改良後のフロー（図の (d)）では _____，最後のフロー（図の (f)）では _____ となっており，コストが改善されている．

[**課題 8.2**] 課題 8.1 をクライン法を用いて解け．((a) コストは無視して必要な流量を流すフローを見つける (b) 残余ネットワークを作り，負閉路を探し，コストが改善されたフローを求める．(c) 負閉路がなくなるまで繰り返す.）

8.4 ネットワーク計画法のまとめ

代表的なネットワーク最適化問題とその解法は以下のとおり．

- 最短路問題 ··· ダイクストラ法
- 最大流問題 ··· フロー増加法（ラベリング法を使って）
- 最小費用流問題 ··· バサッカー・ゴーウェン法，クライン法

8.5 付録（最短路問題の別の解法）

ダイクストラのアルゴリズムでは，負の長さを持つネットワークには適用できなかった．ここでは，負の長さを持つネットワークに対しても適用できるアルゴリズムを紹介する．

フロイド・ワーシャル法： ネットワーク $G = (V, E)$, 枝 $(i, j) \in E$ の長さを a_{ij} とする．(a_{ij} は正とは限らない．）任意の 2 点間の最短距離とその路を求める．具体的には，以下のとおり．

フロイド・ワーシャル法

(Step 1) 初期状態として，すべての $i, j \in V$ に対して，$d(i, j) = a_{ij}$, $p(i, j) = i$ とおく．ただし $d(i, i) = 0$ とし，$(i, j) \notin E$ ならば $d(i, j) = \infty$ とする．すべての $k \in V$ に対して，Step 2 を順に行う．

(Step 2) すべての $i(\neq k) \in V$ と $j(\neq k) \in V$ に対して，

$$d(i,j) > d(i,k) + d(k,j) \text{ ならば } \begin{cases} d(i,j) \leftarrow d(i,k) + d(k,j) \\ p(i,j) \leftarrow p(k,j) \end{cases}$$

とする．

例として，図 8.5 のネットワークにフロイド・ワーシャル法を適用してみよう．

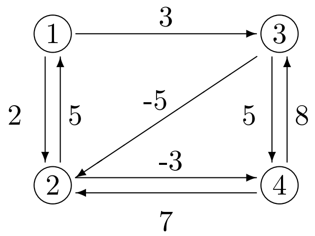


図 8.5: 負の長さの枝が存在するネットワーク

初期状態および各繰り返しにおける $d(i,j), p(i,j)$ を表で表すと，

$$
\begin{array}{cc|cccc}
 & & & j & & \\
\multicolumn{2}{c|}{d(i,j)} & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
 & 1 & 0(1) & 2(1) & 3(1) & \infty(1) \\
i & 2 & 5(2) & 0(2) & \infty(2) & -3(2) \\
 & 3 & \infty(3) & -5(3) & 0(3) & 5(3) \\
 & 4 & \infty(4) & 7(4) & 8(4) & 0(4)
\end{array}
$$

$$
\Rightarrow \quad
\begin{array}{cc|cccc}
 & & & j & & \\
\multicolumn{2}{c|}{d(i,j)} & \underline{1} & 2 & 3 & 4 \\
\hline
 & \underline{1} & \underline{0(1)} & \underline{2(1)} & \underline{3(1)} & \underline{\infty(1)} \\
i & 2 & \underline{5(2)} & 0(2) & 8(1) & -3(2) \\
 & 3 & \underline{\infty(3)} & -5(3) & 0(3) & 5(3) \\
 & 4 & \underline{\infty(4)} & 7(4) & 8(4) & 0(4)
\end{array}
$$

$$
\Rightarrow \quad
\begin{array}{cc|cccc}
 & & & j & & \\
\multicolumn{2}{c|}{d(i,j)} & 1 & \underline{2} & 3 & 4 \\
\hline
 & 1 & 0(1) & \underline{2(1)} & 3(1) & -1(2) \\
i & \underline{2} & \underline{5(2)} & \underline{0(2)} & \underline{8(1)} & \underline{-3(2)} \\
 & 3 & 0(2) & \underline{-5(3)} & 0(3) & -8(2) \\
 & 4 & 12(2) & \underline{7(4)} & 8(4) & 0(4)
\end{array}
$$

$$
\Rightarrow \quad
\begin{array}{cc|cccc}
 & & & j & & \\
\multicolumn{2}{c|}{d(i,j)} & 1 & 2 & \underline{3} & 4 \\
\hline
 & 1 & 0(1) & -2(3) & \underline{3(1)} & -5(2) \\
i & 2 & 5(2) & 0(2) & \underline{8(1)} & -3(2) \\
 & \underline{3} & \underline{0(2)} & \underline{-5(3)} & \underline{0(3)} & \underline{-8(2)} \\
 & 4 & 8(2) & 3(3) & \underline{8(4)} & 0(4)
\end{array}
$$

$$
\Rightarrow \quad
\begin{array}{cc|cccc}
 & & & j & & \\
\multicolumn{2}{c|}{d(i,j)} & 1 & 2 & 3 & \underline{4} \\
\hline
 & 1 & 0(1) & -2(3) & 3(1) & \underline{-5(2)} \\
i & 2 & 5(2) & 0(2) & 5(4) & \underline{-3(2)} \\
 & 3 & 0(2) & -5(3) & 0(3) & \underline{-8(2)} \\
 & \underline{4} & \underline{8(2)} & \underline{3(3)} & \underline{8(4)} & \underline{0(4)}
\end{array}
$$

となる．表の括弧内は $p(i,j)$ の値.

初期状態では，$d(i,j)$ には他の節点を経由しない節点 i から j への長さを示している．各繰り返しにおいて，すでに k として選ばれた節点からなる集合を S としたとき，$d(i,j)$ の値は S 内の節点のみを経由する最短路の長さを示している．したがって，最終的に得られた $d(i,j)$ の値が i から j への最短距離となる．

また，$p(i,j)$ は，その時点での節点 i から j への最短路の，すぐ前の節点を示す．たとえば，3 から 4 への最短路は，$p(3,4)=2$ であるから 4 へ行く前に 2 を経由する，3 から 2 への最短路は $p(3,2)=3$ より直接 3 から 2 へ行く．したがって，$(3\to 2\to 4)$ が最短路である．同様に，1 から 4 への最短路は $(1\to 3\to 2\to 4)$ である．

では，図 8.6 で示されるネットワークに対して，フロイド・ワーシャル法を適用するとどうなるか？

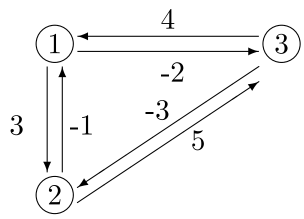


図 8.6: 負閉路が存在するネットワーク

	1	2	3
1	$0(1)$	$3(1)$	$-2(1)$
2	$-1(2)$	$0(2)$	$5(2)$
3	$4(3)$	$-3(3)$	$0(3)$

$\Rightarrow$

	1	2	3
1	$0(1)$	$3(1)$	$-2(1)$
2	$-1(2)$	$0(2)$	$-3(1)$
3	$4(3)$	$-3(3)$	$0(3)$

$\Rightarrow$

	1	2	3
1	$0(1)$	$3(1)$	$-2(1)$
2	$-1(2)$	$0(2)$	$-3(1)$
3	$-4(2)$	$-3(3)$	$-6(1)$

$\Rightarrow$

	1	2	3
1	$-6(2)$	$-5(3)$	$-2(1)$
2	$-7(2)$	$-6(3)$	$-3(1)$
3	$-4(2)$	$-3(3)$	$-6(1)$

となり，$d(1,1)=d(2,2)=d(3,3)=-6$ となる．これは，$(1\to 3\to 2\to 1)$ が長さ -6 の負閉路となっていることを示す．また，最終的な表の中には，閉路を含む路を示す部分もあり，k の選ぶ順番によって，異なる解が得られる可能性がある．たとえば，2 から 1 への最短路は $(2\to 1\to 3\to 2\to 1)$ を示している．

このように，負閉路を含む場合は最短路を求めることができないが，負閉路が存在することを検出することができる．

以上より，フロイド・ワーシャル法は

- バサッカー・ゴーウェン法における残余ネットワーク上の最短路の探索

- フロイド法における負閉路の探索

に利用できる．

[**課題 8.3**]　課題 8.2 において求めた全ての残余ネットワークに対し，フロイド・ワーシャル法を適用してみよ．