第7回　ネットワーク計画法II
― 最大流問題 ―

7.1　最大流問題とは

[**問題 7.1**]　図 6.2 に与えられたネットワークにおいて，節点 1 から節点 6 まで最大どれだけ流すことができるか.（枝に与えられた値＝その枝の容量）

与えられたグラフ（ネットワーク）$G = (V, E)$ において，ソースを $s \in V$ を，シンクを $t \in V$，枝 (i, j) の容量を $u_{i,j}$ とする．最大流問題を線形計画問題として定式化すると以下のとおり．$x_{i,j}$ は枝 (i, j) に流れる量を表す変数.

目的関数：　___ → 最大化

制約条件：
$$\sum_{(s,j)\in E} x_{s,j} - \sum_{(i,s)\in E} x_{i,s} = f \tag{7.1}$$

$$\underline{\hspace{10cm}} \tag{7.2}$$

$$\underline{\hspace{10cm}} \tag{7.3}$$

$$0 \le x_{i,j} \le u_{i,j} \quad ((i, j) \in E) \tag{7.4}$$

ソースとシンク以外の接点に対する制約条件（式 (7.2)）を ________________ という．最後の制約条件（式 (7.4)）は，________________ という．また，流れ保存則と容量制約条件を満たしている $\mathbf{x} = \{x_{ij}\}$ を ________ と呼ぶ．また，そのときの f の値を ________ と呼ぶ.

ここでは，フロー増加法と呼ばれるアルゴリズムについて説明する.

以後，ネットワークには枝 (i, j) と枝 (j, i) が同時に存在することはないと仮定する.

7.2　フロー増加法

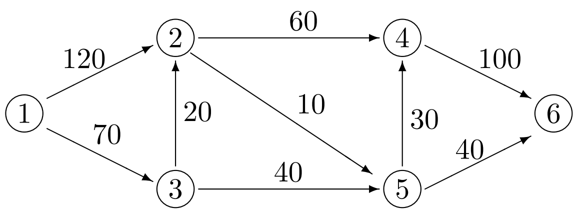
あるフロー $\mathbf{x} = \{x_{ij}\}$ が得られているとする.

残余ネットワーク: 元のネットワーク $G=(V,E)$ の各枝 $(i,j)\in E$ を，容量 $u^x_{ij}=u_{ij}-x_{ij}$ を持つ枝 (i,j) と容量 $u^x_{ji}=x_{ij}$ を持つ枝 (j,i) に置き換えたネットワーク.（$u^x_{ij}=0$ の場合は枝 (i,j) は ______________ とする.）$G^x=(V,E^x)$ と書く．また，残余ネットワークにおける u^x_{ij} の値を ______________ と呼ぶ.

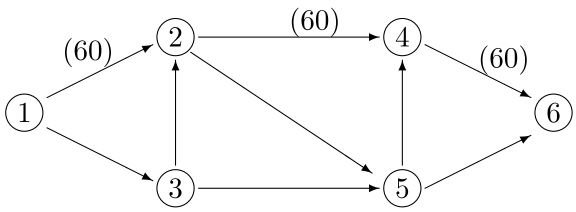
フロー増加路： 残余ネットワークにおけるソースからシンクへの路.

残余ネットワークは，与えられたフロー以上にどれだけ流せるかを示すネットワークとなる．したがって，フロー増加路が存在するときには，その路にそって，さらにフローを増加させることができる.

たとえば，図 7.1 の (a) で示すネットワークで，同図 (b) で示す節点 1 から節点 6 のフローが得られているとする．この場合，残余ネットワークは図 7.2 のようになり，太矢印で示すような増加路が存在する．したがって，フロー増加路に沿ってフローを増加させることができる．また，フロー増加路によって追加できるフローの量は，増加路に含まれる枝の残余容量の ________ である．この例の場合は，___ である.



(a) ネットワーク



(b) フロー

図 7.1: ネットワークとフローの例

元々得られていたフローに，増加路に沿ったフローを追加すると，図 7.3 のような流量の大きい新しいフローが得られる.

以上の作業を，増加路が存在しないフローが得られるまで繰り返して最大流を求める方法を，**フロー増加法**という．具体的な手順は以下のとおり.

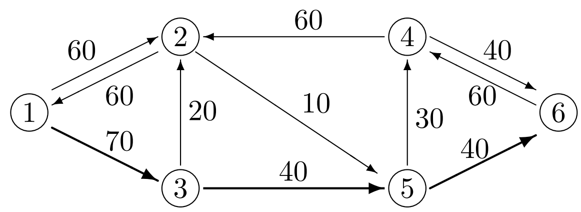


図 7.2: 残余ネットワークと増加路

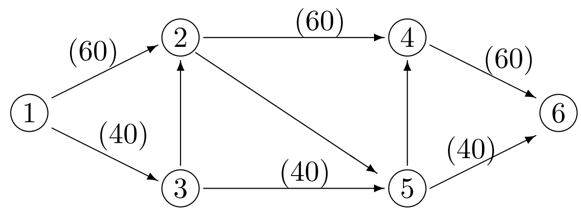


図 7.3: 流量の増加した新しいフロー

フロー増加法

(Step 0) 初期フローを得る．(たとえば，すべての枝について $x_{ij} = 0$)

(Step 1) 残余ネットワークを作り，フロー増加路を見つける．存在しなければ終了．

(Step 2) フロー増加路に沿って，フローを追加する．追加するフローの量は，フロー増加路に含まれる枝の ____________________．Step 1 に戻る．

フロー増加路の見つけ方（アルゴリズム）については，次節で扱う．

[**課題 7.1**] (1) 図 7.1 の (a) で示すネットワークにおいて，図 7.3 のフローに対する残余ネットワークを図示せよ．
(2) また，フロー増加路を見つけ，流量の増加したフローを図示せよ．

フロー増加法では，残余ネットワークからフロー増加路を見つける必要がある．上の例のように小さなネットワークの場合は増加路を見つけることはたやすいが，大きなネットワークでは見て探すことは困難．そのために使われるアルゴリズムに，次節で説明するラベリング法がある．

7.3　ラベリング法

ラベリング法:　ネットワーク（グラフ）$G = (V, E)$ とソース $s \in V$ とシンク $t \in V$ が与えられたときに，ソースからシンクへの路を見つけるアルゴリズム．

ラベリング法では，ソースから到達可能な点に順次ラベルをつけて行く．シンクにラベルがついたとき，ラベルを逆にたどればソースからシンクへの路が求まる．具体的には以下のとおり．

ラベリング法

(Step 0) 初期状態として $L = \{s\}$, $S = \{\}$ とし，全ての節点 $i \in V$ に対してラベルを $p(i) = 0$ とする．

(Step 1) 節点 $\hat{i} \in L \setminus S$ を一つ選び，$S \leftarrow S \cup \{\hat{i}\}$ とする．

(Step 2) すべての枝 $(\hat{i}, j) \in E$ について，

$$j \notin L \text{ ならば } L \leftarrow L \cup \{j\}, p(j) \leftarrow \hat{i}$$

とする．

(Step 3) $t \in S$ または $L = S$ ならば終了．そうでなければ，Step 1 にもどる．

- 集合 L は，ラベルづけされた（______________________________）節点の集合
- 集合 $S(\subseteq L)$ は，____ の節点の集合

したがって，$t \in L$ で終了した場合はソースからシンクへの路（つまり増加路）が求まっている．一方，$L = S$ でラベリング法が終了した場合は，経路が存在しないことを意味するので，フロー増加法も終了となる．

例として，先の図 7.2 の残余ネットワークを考えよう.（増加路を見つけるためには，残余ネットワークに対してラベリング法を適用することに注意.）

(0) 初期状態は $L = \{1\}, S = \{\}, p(1) = p(2) = \cdots = p(6) = 0$.

(1) $L \setminus S = \{1\}$ より $\hat{i} = 1$ を選択，$S = \{1\}$.
$(1, 2), (1, 3) \in E$ より $L \leftarrow \{1, 2, 3\}, p(1) = p(2) = 1$.

(2) $L \setminus S = \{2, 3\}$ より $\hat{i} = 2$ を選択，$S = \{1, 2\}$.
________$\in E$ より $L \leftarrow \{$____________$\}$,____________.

(3) $\hat{i} = 3$ を選択，$S = \{1, 2, 3\}$.
________________ $\in E$ だが，____.

(4) $\hat{i} = 5$ を選択，$S =$ ______________.
____________________ $\in E$ より $L =$ ____________________，____________________.
ここで，$6 \in L$ なので終了.

この場合は，終了条件より節点 1 から節点 6 への路が求まっている．路は $p(6) = 5, p(5) = 2, p(2) = 1$ と逆にたどることにより ____________________ が得られる．路を求める過程を表で表すと以下のようになる．

	1	2	3	4	5	6
(0)	$\underline{0}$	0	0	0	0	0
(1)		$\underline{1}$	1	0	0	0
(2)			$\underline{1}$	0	2	0
(3)				0	$\underline{2}$	0
(4)				5		5

下線の引いてあるのは，次の繰り返しにおいて選ばれる節点を示している．

[**課題 7.2**]　図 7.1 の (a) で示すネットワークにおいて，図 7.3 のフローに対する残余ネットワークを図示し，ラベリング法を用いて増加路を求めよ．総流量が増加したフローを図示せよ．

[**課題 7.3**]　さらに，前課題で求めたフローの残余ネットワークを図示し，ラベリング法を用いて増加路を求めよ．さらに流量を増やすことは可能か？

7.4　フロー増加法の正当性と最大流最小カット定理

ラベリング法を用いたフロー増加法によって，最大流が求まることを示そう．

カット： 節点集合 V を，ソースを含む集合 S と，シンクを含む集合 T に分割したものを**カット**と呼び，(S, T) と書く．カット (S, T) に対して，$i \in S, j \in T, (i, j) \in E$ のとき $(i, j) \in (S, T)$ と書く．逆に，$i \in T, j \in S, (i, j) \in E$ のとき $(i, j) \in (T, S)$ と書く．

カットの容量： 全ての枝 $(i, j) \in (S, T)$ の容量 u_{ij} の和をカット (S, T) の**容量**と呼び，$C(S, T)$ と書く．つまり，

$$C(S, T) = \sum_{(i,j) \in (S,T)} u_{ij}$$

$\mathbf{x}$ を任意のフロー，f をその流量，(S,T) を任意のカットとする．すると，

$$C(S,T) = \sum_{(i,j)\in(S,T)} \underline{\hspace{1.5cm}} \geq \sum_{(i,j)\in(S,T)} \underline{\hspace{1.5cm}}$$

また，

$$f = \sum_{(i,j)\in(S,T)} x_{ij} - \sum_{(i,j)\in(T,S)} x_{ij} \leq \sum_{(i,j)\in(S,T)} x_{ij}$$

が成り立つ．したがって，

$$f \;\underline{\hspace{0.8cm}}\; C(S,T)$$

言い替えれば，

$$\max_x f \;\underline{\hspace{0.8cm}}\; \min_{(S,T)} C(S,T) \tag{7.5}$$

となる．

さて，ラベリング法を用いたフロー増加法が終了したとき，フロー $\mathbf{x}^*$，流量 f^* が得られていたとする．また，ラベリング法の終了条件より，残余ネットワーク $G^x = (V, E^x)$ に対して，ソースを含みシンクを含まない節点集合 S^* が得られているはずである．$T^* = V \setminus S^*$ と定義すると，(S^*, T^*) はカットとなる．S^* は，残余ネットワークにおいて，ソースから到達可能な節点の集合であるから，E^x には S^* 内の節点から T^* 内の節点への枝は存在しない．したがって，枝 $(i,j) \in E$ に対して，

- $(i,j) \in (S^*, T^*)$ ならば $\underline{\hspace{3cm}}$ である．($x^*_{ij} < u_{ij}$ と仮定すると，残余ネットワークには $u^x_{ij} =$$\underline{\hspace{4.5cm}}$ の容量を持つ S^* から T^* への枝 (i,j) が存在することになり，矛盾.）

- $(i,j) \in (T^*, S^*)$ ならば $\underline{\hspace{3cm}}$ である．($x^*_{ij} > 0$ と仮定すると，残余ネットワークには $u^x_{ji} =$$\underline{\hspace{3cm}}$ の容量を持つ S^* から T^* への枝 (j,i) が存在することになり，矛盾.）

したがって，フロー $\mathbf{x}^*$ の流量 f^* は，

$$f^* = \sum_{(i,j)\in(S^*,T^*)} x^*_{ij} - \sum_{(i,j)\in(T^*,S^*)} x^*_{ij} = \sum_{(i,j)\in(S^*,T^*)} u_{ij} = C(S^*, T^*)$$

を満たしている．式 (7.5) より，f^* が最大流量であることがわかり，$\mathbf{x}^*$ は最大流となっている．

以上より，次の定理が成り立つ．

定理 7.1 （最大流最小カット定理）任意のネットワークにおいて，フローの最大流量とカット容量の最小値は等しくなる．

7.5　フロー増加法の改良

フロー増加法の計算量について考えてみよう．n:節点数，m:枝数，U:枝容量の最大値，枝容量は全て整数とすると，

- 一回のラベリング法の計算量は枝の本数に比例：$O(m)$.
- フロー増加法の各繰り返しで，少なくとも流量は１増える．また，最大流量は高々mU．したがって，フロー増加法の繰返し回数は高々mU.
- 全体では，$O(m^2U)$ となる．

U が非常に大きいとき，非効率である．改良方法としては，以下の方法がある．

- 複数のフロー増加路が存在する場合，必ず最も短い（枝数の少ない）路を選ぶことにすると，フロー増加法の繰返し回数が $mn/2$ 以下になることが知られている．全体では $O(m^2n)$ となり U によらず，多項式時間アルゴリズムとなる．
- １度に複数のフロー増加路を求めて，たくさんフローを増加させる．たとえば，ある繰り返しでは枝数が 3 のフロー増加路をすべて求め，全ての増加路に沿ってフローを追加する．次の繰り返しでは，枝数が 3 の増加路は存在しないので，今度は枝数 4 の増加路を全て求める．すると，繰り返しの回数は高々節点数 n．複数の増加路を１度に求める計算量は $O(mn)$ で実行可能であることが知られている．全体では $O(mn^2)$ となる．

Q & A

Q.　「フロー増加法」には，考案者の名前のついた呼び方はないのですか？

A.　あります.「フォード-ファルカーソン法」と呼ばれたりもします.