

第5回 線形計画法IV

—— 双対定理 ——

5.1 双対問題

標準形の問題：

目的関数： $z = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow$ 最小化

制約条件： $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$

$2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 12$

$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

に対して、別の変数 y_1, y_2 とこれによって決定される w を

$$w = 5y_1 + 12y_2$$

と定めることにする．すると、 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ が元の問題の実行可能解であれば、

$$(x_1 + 2x_2 + 3x_3)y_1 = 5y_1$$

$$(2x_1 + 5x_2 + 4x_3)y_2 = 12y_2$$

より

$$w = (y_2 + 2y_2)x_1 + (2y_1 + 5y_2)x_2 + (3y_1 + 4y_2)x_3$$

となる．したがって $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ が

$$y_2 + 2y_2 \leq 1$$

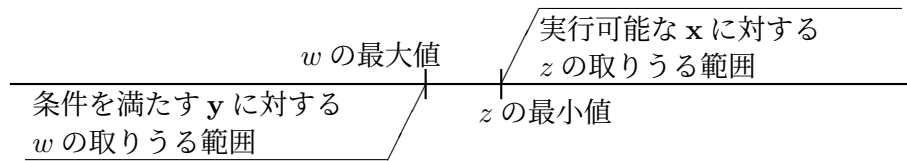
$$2y_1 + 5y_2 \leq 1$$

$$3y_1 + 4y_2 \leq 1$$

という条件を満たしていれば、全ての実行可能解 $\mathbf{x}$ に対して

$$w = (y_2 + 2y_2)x_1 + (2y_1 + 5y_2)x_2 + (3y_1 + 4y_2)x_3 \leq x_1 + x_2 + x_3 = z$$

が成り立つ．これを図に表すと、次のようになる．



ここで，次の問題を考える．

$$\text{目的関数： } w = 5y_1 + 10y_2 \rightarrow \text{最大化}$$

$$\text{制約条件： } y_1 + 2y_2 \leq 1$$

$$2y_1 + 5y_2 \leq 1$$

$$3y_1 + 4y_2 \leq 1$$

すると，

$$\text{元の問題の最小値} \geq \text{新しい問題の最大値}$$

が成り立つ．この様な関係にある新しい問題を _____ といい，(D) と書く．これに対して元の問題を _____ といい，(P) と書く．(P) と (D) は常に図 5.1 の関係を満たしている．

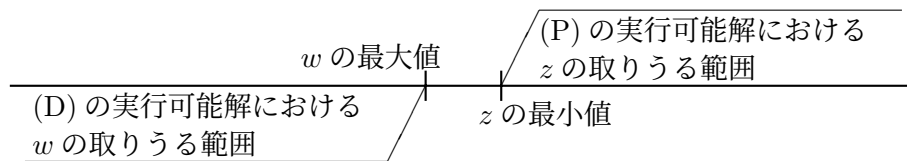


図 5.1: (P) と (D) の目的関数の関係

一般に，標準形：

$$\text{目的関数： } z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \text{最小化}$$

$$\text{制約条件： } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

を主問題 (P) とすると，双対問題 (D) は

$$\text{目的関数： } w = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \rightarrow \text{最大化}$$

$$\text{制約条件： } \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}$$

となる．

定理 5.1 双対問題のそのまた双対問題は，主問題に等しい．

証明： 標準形の問題,

$$\text{目的関数： } z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \text{最小化}$$

$$\text{制約条件： } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

を主問題とすると, 双対問題は

$$\text{目的関数： } w = \underline{\hspace{2cm}} \rightarrow \text{最大化}$$

$$\text{制約条件： } \underline{\hspace{2cm}}$$

となる. これを標準形に直す. まず, 非負条件がないので各変数を2つにわけると,

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1 \geq \mathbf{0}, \mathbf{y}_2 \geq \mathbf{0}$$

すると,

$$\text{目的関数： } \underline{\hspace{2cm}} \rightarrow \text{最大化}$$

$$\text{制約条件： } \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\underline{\hspace{2cm}}$$

スラック変数 $\mathbf{y}_3$ を導入して,

$$\text{目的関数： } \underline{\hspace{2cm}} \rightarrow \text{最大化}$$

$$\text{制約条件： } \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\underline{\hspace{2cm}}$$

目的関数を最小化にすると,

$$\text{目的関数： } \underline{\hspace{2cm}} \rightarrow \text{最小化}$$

変数ベクトルを $\mathbf{y}' = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3)^T$ とすると, 費用ベクトル $\mathbf{c}'$, 係数行列 $\mathbf{A}'$, 右辺ベクトル $\mathbf{b}'$ はそれぞれ

$$\mathbf{c}' = (-\mathbf{b}^T | \mathbf{b}^T | \mathbf{0})^T,$$

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{A}^T | -\mathbf{A}^T | \mathbf{E}),$$

$$\mathbf{b}' = \mathbf{c}$$

となる. この問題の双対問題 (つまり, 元の問題の双対の双対問題) は,

$$\text{目的関数： } w' = (\mathbf{b}')^T \mathbf{y}' \rightarrow \text{最大化}$$

$$\text{制約条件： } (\mathbf{A}')^T \mathbf{y}' \leq \mathbf{c}'$$

であるから、上式を代入すると

$$\begin{aligned} \text{目的関数: } & w' = \mathbf{c}^T \mathbf{y}' \rightarrow \text{最大化} \\ \text{制約条件: } & \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} \mathbf{y}' \leq \begin{pmatrix} -\mathbf{b} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が得られる。制約条件の式は、

$$\mathbf{A}\mathbf{y}' \leq -\mathbf{b}, \quad -\mathbf{A}\mathbf{y}' \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{E}\mathbf{y}' (= \mathbf{y}') \leq \mathbf{0}$$

を意味しているから、

$$\mathbf{A}(-\mathbf{y}') \geq \mathbf{b}, \quad \mathbf{A}(-\mathbf{y}') \leq \mathbf{b}, \quad -\mathbf{y}' \geq \mathbf{0}$$

となり、結局

$$\begin{aligned} \text{目的関数: } & -w' = \mathbf{c}^T(-\mathbf{y}') \rightarrow \text{最小化} \\ \text{制約条件: } & \mathbf{A}(-\mathbf{y}') = \mathbf{b} \\ & -\mathbf{y}' \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

となる。これは、 $\mathbf{x} = -\mathbf{y}', z = -w'$ とすれば主問題そのものである。

Q.E.D.

5.2 双対定理

図 5.1 より、主問題と双対問題の間には次の関係があることがわかる。

定理 5.2 (弱双対定理) $\mathbf{x}$ を主問題 (P) の実行可能解、 $\mathbf{y}$ を双対問題 (D) の実行可能解とすると、

$$\mathbf{b}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}.$$

定理 5.3 (P) が非有界ならば、 (D) は実行可能解を持たない。(逆も同様)

定理 5.4 (P) のある一つの実行可能解 $\mathbf{x}^*$ と (D) のある一つの実行可能解 $\mathbf{y}^*$ が

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*$$

を満たしているならば、これらはそれぞれ (P) と (D) の最適解である。

さらに、次の定理が証明できる。

定理 5.5 (双対定理) (P) が最適解を持つならば (D) も最適解を持ち、 (P) における z の最小値と (D) における w の最大値は等しい。

証明： $\bar{\mathbf{x}}$ を (P) の最適基底解、 $\bar{z}$ を z の最小値としよう。 $\bar{\mathbf{x}}$ を基底変数 $\bar{\mathbf{x}}_B$ と非基底変数 $\bar{\mathbf{x}}_N$ に分けて $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{\mathbf{x}}_B | \bar{\mathbf{x}}_N)^T$ とし、係数行列と費用ベクトルも基底部分と非基底部分に分けて $\mathbf{A} = (\mathbf{B} | \mathbf{N})$, $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_B | \mathbf{c}_N)^T$ とすると、2.3 節より、

$$\bar{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \quad (5.1)$$

$$\bar{z} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \quad (5.2)$$

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \quad (5.3)$$

が満たされている。

まず、 (D) が実行可能解を持つことを示す。 $\bar{\mathbf{y}}$ を

$$\bar{\mathbf{y}}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$$

と定義する。すると、

$$\bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{B} = \mathbf{c}_B^T,$$

$$\mathbf{B}^T \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{c}_B.$$

また、式 (5.3) より

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{c}_N^T - \bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{N},$$

$$\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{y}} \leq \mathbf{c}_N.$$

したがって、

$$\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{N}^T \end{pmatrix} \bar{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_B \\ \mathbf{c}_N \end{pmatrix} = \mathbf{c}$$

より、 $\bar{\mathbf{y}}$ は (D) の制約条件を満たしており、 (P) は実行可能解 $\bar{\mathbf{y}}$ が存在することがわかる。

次に、式 (5.2) より

$$\bar{z} = \bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \bar{\mathbf{y}}$$

であり、これは解ベクトル $\bar{\mathbf{y}}$ における目的関数の値となっている。したがって、定理 5.4 より $\bar{\mathbf{y}}$ は (D) の最適解であり、 (D) の目的関数の最大値は (P) の目的関数の最小値 $\bar{z}$ と等しい。 Q.E.D.

以上をまとめると次のようになる。

主問題

実行可能 $\left\{ \begin{array}{l} \text{最適解あり} \\ \text{非有界} \end{array} \right\}$
実行可能解が存在しない

双対問題

$\left\{ \begin{array}{l} \text{最適解あり} \\ \text{非有界} \end{array} \right\}$ 実行可能
実行可能解が存在しない

5.3 双対定理の応用

はじめに、双対問題の意味を考えてみよう。

(P) として、問題 2.1 にあるような輸送問題を考える。工場 A_i における生産量を a_i 、取引先 B_j の注文量を b_j 、 A_i と B_j 間の輸送コストを c_{ij} とすると、この問題は標準形：

$$\begin{aligned} \text{目的関数：} & \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} \rightarrow \text{最小化} \\ \text{制約条件：} & x_{11} + x_{21} = b_1 \\ & x_{12} + x_{22} = b_2 \\ & x_{13} + x_{23} = b_3 \\ & x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2 \\ & x_{11}, x_{12}, \dots, x_{23} \geq 0 \end{aligned}$$

と書ける。この問題の双対問題 (D) は、

$$\begin{aligned} \text{目的関数：} & a_1y_1 + a_2y_2 + b_1y'_1 + b_2y'_2 + b_3y'_3 \rightarrow \text{最大化} \\ \text{制約条件：} & y_1 + y'_1 \leq c_{11}, \quad y_2 + y'_1 \leq c_{21} \\ & y_1 + y'_2 \leq c_{12}, \quad y_2 + y'_2 \leq c_{22} \\ & y_1 + y'_3 \leq c_{13}, \quad y_2 + y'_3 \leq c_{23} \end{aligned}$$

となる。この問題は、実は次に示すような問題を表している。

輸送問題を考えている会社（ここでは P 社とする）から、輸送部門を下請けしようとしている会社（こちらを D 社とする）を考えよう。D 社は、P 社の各工場 A_i で生産した製品を 1 単位あたり y_i (円) で引き取り、各取引先 B_j で 1 単位あたり y'_j (円) で引き渡す契約をしたい。D 社が解くべき問題は、総利益

$$w = \underline{\hspace{10cm}}$$

を最大化するための y_i, y'_j を決定することである．一方，P 社としては，自前で A_i から B_j まで輸送した場合にかかるコストが製品 1 単位あたり c_{ij} 円で，D 社に下請けに出した場合には 1 単位あたり $(y_i + y'_j)$ 円かかるのであるから，

$$y_i + y'_j \leq c_{ij}$$

でなければ取引には応じない．したがって，上記の制約条件が必要となる．

さて，P 社は現在，問題 (P) の最適解に基づいて最適な輸送を行っているでしょう．したがって，最適な基底が選ばれていて，現在の総輸送コストは

$$\bar{z} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b},$$

また，最適条件より

$$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \geq \mathbf{0}$$

が成立している．また，双対問題 (D) の最適解を $\bar{\mathbf{y}} = (\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1})^T$ とすると，

$$\bar{z} = (\bar{\mathbf{y}})^T \mathbf{b}$$

と書ける．

ここで，取引先からの注文量の増加に伴い，工場 A_1 または A_2 に設備投資をし，生産量を δ 増やすことを考えよう．投資後の輸送問題の目的関数は (P) の目的関数と等しい，つまり，費用ベクトルは同じであるので，基底の最適条件は投資前と同じ．したがって，同じ基底が投資後の問題の最適な基底ともなっている．したがって $\mathbf{B}$ も同じ．したがって，投資後の輸送問題の最適値（最小輸送コスト）は，工場 A_1 に投資した場合は

$$\bar{z}' = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{b} + \delta \mathbf{e}_1) = \bar{z} + \delta \bar{y}_1$$

また，工場 A_2 に投資した場合は

$$\bar{z}' = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{b} + \delta \mathbf{e}_2) = \bar{z} + \delta \bar{y}_2$$

となり，それぞれ $\delta \bar{y}_i$ だけコストが増えることになる．したがって， $\bar{y}_i$ が小さい工場 A_i に設備投資をしたほうが，輸送コストの増分を小さく抑えることができる．

このように，双対問題の最適解を用いることによって，システムの変動が目的関数にどのような影響を与えるかを解析することができる（**感度分析**）．

[課題 5.1] 上の問題で，3つの取引先がそれぞれ注文量を δ 増やしたいと要求してきたでしょう．どれか1つの取引先だけを δ 増やすとすると，どの取引先の注文量増加に応じたらよいだろうか？

5.4 線形計画法のまとめ

線形計画問題の解法

定式化

↓

標準形に変形：(a) 目的関数を (-1) 倍する，
 (b) スラック変数を導入して不等式制約条件式を
 等式制約条件式と非負条件に置き換える，
 (c) 非負条件のない変数は2つの非負条件付変数の
 差に置き換える，

↓

標準形：目的関数 $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \text{最小化}$

制約条件 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

↓

初期基底解：人為変数の導入して補助問題を作る，
 補助問題をシンプレックス法で解く，
 人為変数を除いて初期基底解を得る，

↓

シンプレックス法：基底解が最適であるか判定，
 ピボット列・行の決定，ピボット操作

双対定理

双対問題：

(P) $\left\{ \begin{array}{l} \text{目的関数： } z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \text{最小化} \\ \text{制約条件： } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right.$

(D) $\left\{ \begin{array}{l} \text{目的関数： } w = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \rightarrow \text{最大化} \\ \text{制約条件： } \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \end{array} \right.$

双対定理：

主問題 (P)

双対問題 (D)

実行可能	$\left\{ \begin{array}{l} \text{最適解あり} \\ \text{非有界} \end{array} \right.$	$\frac{z^* = w^*}{\text{ }} \quad \frac{\text{最適解あり}}{\text{ }} \quad \frac{\text{非有界}}{\text{ }}$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{最適解あり} \\ \text{非有界} \end{array} \right.$	実行可能
実行可能解が存在しない				