第4回　線形計画法III
— 2段階シンプレックス法 —

4.1　2段階法

シンプレックス法を実行するためには，初期基底形式が得られていなければならない．つまり，

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-z$		0	0		0	
		1	0		0	
		0	0		1	
		0	1		0	

しかし，常に与えられた問題（を定式化して標準化した問題）が，このような条件を満たしているわけではない（基底形式になっているわけではない）．そこで，標準形から基底形式を得る方法が必要である．

最右列に負の値がある場合:　その行全体を ______ することによって，常に最右列は全て非負とすることができる．

単位行列が存在するが z 行が非基底だけで表されていない場合:　z 行に ____________ を加えることによって，基底変数の係数を 0 にできる．

単位行列が存在しない場合:　困る．

困る例として，次の標準形の問題を考てみよう．

$$
\begin{aligned}
\text{目的関数：}\quad & -2x_1 - x_2 - x_3 \ \rightarrow \ \text{最小化} \\
\text{制約条件：}\quad & x_1 + 2x_2 = 12 \\
& x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 20 \\
& x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

タブローで表すと，

	x_1	x_2	x_3	
$-z$	-2	-1	-1	0
	1	2	0	12
	1	4	3	20

となり，単位行列が存在しない．

ここで，各制約条件式に対してそれぞれ新たな変数を導入し，次のような問題を考える．

$$
\begin{aligned}
\text{目的関数：}\quad & w = x_4 + x_5 \ \rightarrow\ \text{最小化} \\
\text{制約条件：}\quad & x_1 + 2x_2 + x_4 = 12 \\
& x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_5 = 20 \\
& x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

この問題を元の問題に対する ______________，x_4, x_5 を ______________ と呼ぶ．

元の問題と補助問題の関係はどのようになっているかを考えてみよう．まず，目的関数 w は全ての人為変数の和であり，人為変数も非負条件がついているので，w の最小値は _____ である．したがって，補助問題を解き w の最小値が求まったとき，下記が言える．

- w の最小値が 0 $\rightarrow$ 補助問題の最適解における人為変数の値はすべて 0．人為変数が全て 0 となるとき，元の問題の制約条件と，補助問題の制約条件は等しい．したがって，人為以外の変数の値は元の問題の実行可能解を与える．
- w の最小値が正（0 とならない） $\rightarrow$ 元の問題の実行可能解は存在しない．

また，補助問題をタブローで表すと，

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-w$	0	0	0	1	1	0
	1	2	0	1	0	12
	1	4	3	0	1	20

のようになり，補助問題の作り方から，必ず人為変数の列に単位行列があわられる．ただし，単位行列が存在するが z 行が非基底だけで表されていないので注意が必要である．上の例では，w 行に他の行の定数倍を加えることによって

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-w$	-2	-6	-3	0	0	-32
	1	2	0	1	0	12
	1	4	3	0	1	20

と変形でき，シンプレックス法が使える形にできる．

実際，これをシンプレックス法で解くと，

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-w$	0	0	0	1	1	0
x_1	1	0	-3	2	-1	4
x_2	0	1	$3/2$	$-1/2$	$1/2$	4

したがって，最適解は ________________，w の最小値は _____ となる．この最適解（から人為変数を除いたもの）は元の問題の初期基底解として使える．つまり，元の問題は，

	x_1	x_2	x_3	
$-z$	-2	-1	-1	0
x_1	1	0	-3	4
x_2	0	1	$3/2$	4

からシンプレックス法をはじめればよい．

このように，補助問題をシンプレックス法で解き，得られた初期基底解を用いて本来の問題をシンプレックス法で解く方法を ________________ という．まとめると，以下のとおり．

2 段階法

(Step 1) 制約条件式の数だけ ________________ を導入し，その和 w を最小化する補助問題を作る．

(Step 2) 補助問題をシンプレックス法を用いて解く．目的関数が 0 にならなかったら，元の問題は実行可能解を持たない．

(Step 3) 補助問題の最適解の基底に人為変数が含まれる場合，基底を交換して基底から外す．

(Step 4) 人為変数をすべて除いて（0 にして），元の問題の初期基底解とする．

(Step 5) 得られた初期基底解からシンプレックス法を用いることによって，元の問題を解く．

[**課題 4.1**] 次の線形計画問題を 2 段階法を用いて解きなさい．

目的関数：　$3x_1 + 2x_2 \ \rightarrow$ 最小化

制約条件：　$2x_1 + x_2 + x_3 = 6$

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

（手順：(a) 人為変数を導入して補助問題を作る，(b) 補助問題を解き，元の問題の初期基底解を求める，(c) 求めた初期基底解を利用して，与えられた問題を解く.）

[**課題 4.2**] 次の線形計画問題を解きなさい.

$$\begin{array}{ll} \text{目的関数：} & 3x_1 + 2x_2 \ \rightarrow \ \text{最小化} \\ \text{制約条件：} & 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ & 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

（手順：(a) スラッグ変数を導入して標準形に直す，(b) 人為変数を導入して補助問題を作る，(c) 補助問題を解き，元の問題の初期基底解を求める，(d) 求めた初期基底解を利用して，標準形を解く，(e) 与えられた問題の解を得る.）

[**課題 4.3**] 次の線形計画問題を解きなさい.

$$\begin{array}{ll} \text{目的関数：} & 3x_1 + 2x_2 \ \rightarrow \ \text{最小化} \\ \text{制約条件：} & 2x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \end{array}$$

4.2　シンプレックス法の効率化

シンプレックスタブローは $m \times n$ の表であり，ピボット操作を行うときには表の全てを書き換える．しかし，実際にピボット操作（ピボット行の決定，ピボット列の決定など）には，表の全てを用いるわけではない.

シンプレックス法における，ある時点での基底変数を $\mathbf{x}_B$，非基底変数を $\mathbf{x}_N$ としよう. 2.3 節で説明したように，行列 $\mathbf{A}$ を基底変数に対応する $m \times m$ 行列:$\mathbf{B}$ と，非基底変数に対応する $m \times (n-m)$ 行列:$\mathbf{N}$ に分けて考えると,

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{Nx}_N + \mathbf{Bx}_B = \mathbf{b} \\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{Ax} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{Nx}_N + \mathbf{Ex}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

と書ける．ただし $\mathbf{E}$ は単位行列．目的関数は,

$$z = f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\mathbf{x}_N + 0\mathbf{x}_B$$

と書ける．タブローとの関係を見てみると，タブロー中の基底変数に対応する部分に現れる単位行列が $\mathbf{E}$ に，それ以外の行列が $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$ に，最右列（z 行を除く）が $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ に対応している．また，z 行では，単位行列の上部（基底変数部分）に現れる 0 が「$+0\mathbf{x}_B$」の 0 に，それ以外の非ゼロの部分が $(\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})$ に，そして，右上の値が現在の基底解における目的関数の値（の符号が逆になったもの）$\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ に対応している．これらより，ピボット操作は下記のように行うことができる．

- ピボット列の選択：$(\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})$ の中に，負の要素があったなら，その中からピボット行を選択する．

- ピボット行の選択：行列 $\mathbf{N}$ の中でピボット行に対応する列を $\mathbf{a}'$ とすると，タブロー中のピボット列は $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}'$ となる．したがって，$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}'$ の要素と $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ の要素の比を計算し，最も小さいものを与える行をピボット行とする．

ピボット列，行の選択に用いたのは，基底変数の選択に応じて直接もとめることのできる $\mathbf{N}$，$\mathbf{c}_B$, $\mathbf{c}_N$，$\mathbf{a}'$，そして $\mathbf{B}^{-1}$ である．$\mathbf{B}^{-1}$ は，新しい基底変数に対応する $\mathbf{B}$ の逆行列を求める計算によってでも求まるが，ピボット操作前の基底に対応する $\mathbf{B}^{-1}$ を用いて，新しい基底に対応する $\mathbf{B}^{-1}$ を容易に求めることができる.（詳細は省略.）

Q & A

Q.　他の参考書・教科書を見たら，タブローの書き方やピボット列の決定方法が違うようだけれど…

A.　シンプレックスタブローは，実際の問題を解く際に現れる式をコンパクトにまとめた表記方法なので，流儀により，目的関数の最大化用の手続き（z 行に正の値がある列をピボット列とする）や，右辺と左辺の逆転（最右列が左側にある），z 行を表示している等，多少の違いがあります．このテキストではその 1 例を挙げているにすぎません．しかし，タブローがどのような式を表しているのかを理解すれば，基本的な考え方は全く同じであることがわかるでしょう．