第3回　線形計画法II
— シンプレックス法 —

シンプレックス法とは，効率的に最適基底解を探索する方法である．

3.1　シンプレックス法の基本

ある問題が基底形式で表されているとする．

１つの初期（実行可能）基底解から始めて，実行可能領域の辺上を，目的関数が減少するように隣の実行可能基底解へと移動して行く（基底を取り替えていく）．つまり，

- 非基底変数の中の１つの非基底変数を 0 から増加,
- 残りの非基底変数は 0 のまま維持.

どの変数を基底に入れるか:　目的関数を $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}'^T\mathbf{x}_N + c'$ と書き表したときに，$c'_j < 0$ となる x_j を増加させれば目的関数は減少する．したがって，そのような x_j を基底変数に入れる．

どこまで増やせるか:　x_j を増加させたときに，元からの基底変数は増減する．

全ての基底変数が増加する場合 ...______________________________

減少する基底変数が有る場合 ...____

3.2　シンプレックスタブロー

$$
\begin{aligned}
\text{目的関数：}\quad & -x_1 - x_2 \ \rightarrow\ \text{最小化} \\
\text{制約条件：}\quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\
& x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\
& x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

を考える．これは基底形式になっている．目的関数も１つの基底変数 $z(= -x_1 - 2x_2)$ と

して扱うことにすると，

$$
\begin{aligned}
\text{目的関数：}\quad & -x_1 - x_2 - z = 0,\ z \ \to\ \text{最小化} \\
\text{制約条件：}\quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\
& x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\
& x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

と書ける．このような基底形式を表で表すと，

	x_1	x_2	x_3	x_4	z	
$-z$	-1	-1	0	0	-1	0
x_3	3	2	1	0	0	12
x_4	1	2	0	1	0	8

のようになる．実は，z 列は常に $(-1,0,0)^T$ となるので，以後は省略して

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	-1	-1	0	0	0
x_3	3	2	1	0	12
x_4	1	2	0	1	8

と表す．これを**シンプレックスタブロー**とよぶ．

シンプレックスタブローは，下記の性質を持つ．

- 標準形が基底形式で書かれている場合，基底変数に対応する列に単位行列が現れる（この例では，x_3, x_4 が基底変数）．
- z 行も非基底変数の列以外は 0 となる．
- 最右列（z 行を除く）が全て非負であるとき，タブローは実行可能基底解を与えている．非基底変数をすべて 0 とした場合，基底変数の値は最右列の値になる．また，現在の基底解における目的関数の値については，右上端の値に (-1) をかけた値となる．

この例では，現在，基底変数として (x_3, x_4) が選択されている．シンプレックス法の方針にそって，目的関数が小さくなるように基底を取り替えてみよう．タブローの z の行 $(-1,-1,0,0)$ は，現在の非基底変数である x_1 または x_2 を大きくすれば目的関数が＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ なることを示している．

たとえば，x_1 は非基底に残したまま（$x_1 = 0$），x_2 を大きくする．制約条件の式

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$$

と $x_1 = 0$ より，$x_3 = 12 - 2x_2$．実行可能であるためには $x_3 \geq 0$ より，________________ でなくてはならない．また，もう一つの制約条件式

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$$

と $x_1 = 0$ より，$x_4 = 8 - 2x_2$．実行可能であるためには $x_4 \geq 0$ より，________________ でなくてはならない．したがって，________________ まで x_2 を大きくすることができる．実際に x_2 を $\min(12/2, 8/2) = 4$ まで大きくすると，基底変数のうち一つは必ず 0 となる（ここでは，________________）．すなわち，x_2 が基底に入り，変わりに ______ が基底から外れて非基底となる．

タブローで考えると，まず

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	$\underline{-1}$	$\underline{-1}$	0	0	0
x_3	3	2	1	0	12
x_4	1	2	0	1	8

下線部を見て基底に入れる（値を 0 から増やす）候補として，負の値を示している x_1 と x_2 を得る．ここでは x_2 を選択することにする.（このように選択した列を ________________ と呼ぶ.）次に，

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	-1	-1	0	0	0
x_3	3	$\underline{2}$	1	0	$\underline{12}$
x_4	1	$\underline{2}$	0	1	$\underline{8}$

下線部を見て，x_2 が $\min(12/2, 8/2)$ まで大きくできることを得る．したがって，8/2 を与える x_4 を基底から外す.（このように選択した元基底の行を ________________ と呼ぶ. また，ピボット行とピボット列の交わる要素を ________________ と呼ぶ.）x_2 を基底とするには，まずピボット行全体をピボット要素で割る．するとピボット要素は必ず ______ となる．

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	-1	-1	0	0	0
x_3	3	2	1	0	12
	1/2	1	0	1/2	4

次に，ピボット列の要素がピボット要素を除いて全て 0 になるように，各行からピボット

行の何倍かを引く（左基本変形の要領）.

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	$-1/2$	0	0	$1/2$	4
x_3	2	0	1	-1	4
x_2	$1/2$	1	0	$1/2$	4

これで，また基底形式を表すタブローとなり，基底変数として (x_2, x_3) を考えればいいことになった．このような操作を ________________ と呼ぶ.

z 行に負の値がある限り，ピボット操作を繰り返すことによって，目的関数の値を小さくしていくことができる.

以上をまとめると，シンプレックス法は次のように表せる.

シンプレックス法

(Step 1) 初期基底形式を得る.（これについては後述）

(Step 2) z 行の中で負の値が存在しなければ現在の非基底変数を 0 とおいた基底解が最適解である.

(Step 3) 負の値が存在する場合，負の値の列を 1 つ選ぶ（ピボット列）.

(Step 4) ピボット列の中の正の係数を持つ行について，基底解の値を係数で割り，最少の値をとる行を選ぶ（ピボット行）.

(Step 5) ピボット操作を行って，ピボット要素以外のピボット列の要素を 0 にする.

(Step 6) Step 2 に戻って繰り返す.

(Step 3) で負の値が複数存在するときには，一般に絶対値の大きい列を選ぶと，少ない繰り返し回数で収束する.

ピボット操作を行うときには，下記の点に注意.

- 右端の列は，z 行以外は全て常に非負．なぜ？

- 右上端の値は必ず ________ する．つまり，目的関数 z の値は必ず ________.

- ある行のピボット列の係数が負の場合は，新しく基底にはいる変数を大きくすると，その行に対応する基底変数も大きくなることを示している．したがって，ピボット列の係数がすべて負の場合は，新しく基底にはいる変数をいくらでも大きくでき，非有界となる.

[課題 3.1] 上の例の続きを行い，最適解とその時の目的関数の値を求めよ．

[課題 3.2] 同じ例で，はじめに x_1 を基底に入れて最適解を求めよ．

[課題 3.3] 次の問題をシンプレックス法を用いて解け．

$$
\begin{aligned}
&\text{目的関数：} && -3x_1 - 2x_2 \ \rightarrow\ \text{最小化} \\
&\text{制約条件：} && 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\
& && x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\
& && x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 4)
\end{aligned}
$$

3.3 退化

たとえば，あるときタブローが

	x_1 x_2 x_3 $\cdots$	
$-z$	負	
x_2	正	0

で表されていたとする．非基底変数から基底変数へ入れる変数として x_1 を選択した場合，ピボット値は $\min(0/\text{正}, \ldots) = 0$ となる．すると，ピボット行（x_2 行）を何倍かして z 行から引いても（足しても）タブローの右上の値は変化しない．つまり，基底の入れ換えを行っても目的関数値は改善されない．このような場合，**退化**しているという．

退化が連続して起こると，何回か基底の入れ換えを行った後また同じ基底が現れることがある（循環，巡回）．循環状態が起こると，最適解を求めることができない．

巡回を防止する方法として，**Bland の最小添字規則**がある．

Bland の最小添え字規則: ピボット行，ピボット列の候補が複数あるときには，変数の添え字の最も小さいものを選択する．

退化が生じたとき，Bland の最小添え字規則を用いれば，必ず最適基底解が求まることが証明されている．ただし，この規則に従うと反復の回数が大きくなるという弊害がある．実際問題として，循環状態が起こる可能性は極めて低い．

[課題 3.4] 次の問題は退化している．

$$
\begin{aligned}
&\text{目的関数：} && -6x_1 - 10x_2 - 3x_3 - z = 0,\ z \rightarrow \text{最小化} \\
&\text{制約条件：} && 4x_1 + 8x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\
& && -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 0
\end{aligned}
$$

$$x_2 + x_6 = 1$$
$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 6)$$

ピボット操作を行い，基底およびそのときの z の値がどのように変化するか調べよ．