

第2回 線型計画法I

— 標準形と基底形式 —

第2回から第4回までの3回にわたり，線形計画問題の解き方を学習する．標準形への変換方法，線形計画問題の代表的な解法であるシンプレックス法の基本的な考え方を与える幾何学的な解法，シンプレックス法などについて説明する．

2.1 標準形

次の問題を考える．

[問題 2.1] 2つの工場 A_1, A_2 で同じ製品を生産し，3つの取引先 B_1, B_2, B_3 へ納入している会社がある．各取引先からの注文量，各工場における生産量は，表 2.1 の (a), (b) のとおりである．また，各工場から各取引先までの製品 1 単位あたりの輸送コストは同表 (c) に示してある．総輸送コストが最少になるようにするには，どのように輸送計画を立てればよいか．

表 2.1: 輸送問題におけるデータ

(a) 注文量		(b) 生産量		(c) 輸送コスト			
B_1	70	A_1	90		B_1	B_2	B_3
B_2	40	A_2	80	A_1	4	7	12
B_3	60			A_2	11	6	3

工場 A_i から取引先 B_j へ輸送する量を x_{ij} (単位) とすると，この問題は

目的関数： _____ → 最小化

制約条件： $x_{11} + x_{21} = 70$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 90$$

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{32} \geq 0$$

と書ける．このように，

$$\text{目的関数: } \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \text{最小化}$$

$$\text{制約条件: } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

のように表した問題を標準形という．

問題 1.1 (1 ページ) を定式化すると，

$$\text{目的関数: } 70x_1 + 120x_2 + 30x_3 \rightarrow \text{最大化}$$

$$\text{制約条件: } 5x_1 \qquad \qquad + 6x_3 \leq 80$$

$$\qquad \qquad 2x_2 \qquad + 8x_3 \leq 50$$

$$\qquad \qquad 7x_1 \qquad \qquad + 15x_3 \leq 100$$

$$3x_1 + 11x_2 \qquad \qquad \leq 70$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

となる．標準形と異なるところは，

- 目的関数の _____ でなく _____ ．
- 制約条件が _____ でなく _____ ．

このように，与えられた問題を定式化すると標準形とは異なることも多い．しかし，全ての問題が標準形に定式化することができる．

標準形に変形する方法 (a): 目的関数を _____ する．

標準形に変形する方法 (b): 新しい変数を導入する．たとえば， x_4 を

$$x_4 = 80 - 5x_1 - 6x_3$$

と定義すれば，1 番目の制約条件の不等式 $5x_1 + 6x_3 \leq 80$ は，

$$5x_1 + 6x_3 + x_4 = 80, \quad x_4 \geq 0$$

と書ける．同様に x_5, x_6, x_7 を導入すると制約条件は全て等式と非負条件のみになる．ここで導入した x_4 のような変数をスラック変数という．

したがって，問題 1.1 は標準形の問題

$$\text{目的関数： } \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \text{最小化}$$

$$\text{制約条件： } \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -70 \\ -120 \\ -30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 15 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 80 \\ 50 \\ 100 \\ 70 \end{pmatrix}$$

と等価になる（標準形で表すことができた）．では，

$$\text{目的関数： } -x_1 + 5x_2 \rightarrow \text{最小化}$$

$$\text{制約条件： } 4x_1 - 6x_2 = 30$$

$$2x_1 + 8x_2 - x_3 = 50$$

$$7x_1 + 5x_2 + x_4 = 10$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0$$

はどうだろうか．標準形と異なるところは

- _____

標準形に変形する方法 (c): 非負条件のない変数 x_2 は非負条件のある 2 つの変数 x'_2, x''_2 によって $x_2 = x'_2 - x''_2$ と書き表すことができるので，置き換える．

したがって上記の問題は

$$\text{目的関数： } -x_1 + 5x'_2 - 5x''_2 \rightarrow \text{最小化}$$

$$\text{制約条件： } 4x_1 - 6x'_2 + 6x''_2 = 30$$

$$2x_1 + 8x_2' - 8x_2'' - x_3 = 50$$

$$7x_1 + 5x_2' - 5x_2'' + x_4 = 10$$

$$x_1 \geq 0, x_2' \geq 0, x_2'' \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0$$

のように標準形に書き直すことができる．

このように，すべての線形計画問題は標準形に書き直すことができる．

[課題 2.1] 次のように定式化された問題を標準形に書き換えてみよ．

目的関数: $x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow$ 最大化

制約条件: $x_1 + x_2 \leq 10$

$-x_1 + x_3 \geq 8$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

Q & A

Q. なぜ，すべての線形計画問題をわざわざ標準形に直さなくてはならないの？

A. 最大化の場合の解法，最小化の場合の解法，非負条件がある場合，ない場合，制約条件が等号の場合，不等号の場合，... と，それぞれ解き方を考えることもできますが，全ての問題を標準形で表すことができれば，標準形の解法のみを開発すれば（勉強すれば）よいことになり，とても嬉しいですね．

2.2 幾何学的手法による線形計画問題の解き方

2.2.1 決定変数が2つの場合

次のように定式化された問題を考える（ここでは標準形にはしていない）。

$$\text{目的関数： } f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \rightarrow \text{最大化}$$

$$\text{制約条件： } x_1 + x_2 \leq 4$$

$$-x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

制約条件を満たす (x_1, x_2) の領域を図示すると図 2.1 の斜線部となる．この領域を _____，領域内にある (x_1, x_2) を _____ という．

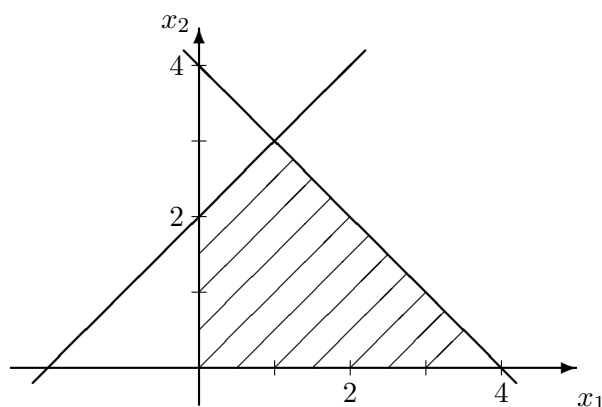


図 2.1: 実行可能領域

一方， $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 = k$ で表される直線をグラフ上に書き込むと図 2.2 のようになる．ただし， $x_2 = -x_1/2 + k/2$ であるから，直線上の点 $P : (x_1, x_2)$ を与えたときの目的関数の値は，点 P を通る直線と x_2 軸との交点の x_2 座標（ x_2 切片）の 2 倍である．したがって与えられた問題を解くためには，直線 $f(x_1, x_2) = k$ を k を増やす方向（_____ 方向へ）平行移動させていく． x_2 切片が _____ より大きくなると実行可能領域と直線との共通点がなくなるので， k を大きくできる限界は _____ であることがわかる．また， $k =$ _____ を与える実行可能解は点 _____ のみである．このように目的関数の最大（あるいは最小）値を与える実行可能解を最適解という．ここでは，最適解は $x_1 =$ _____, $x_2 =$ _____ である．

ポイント： 最適解は，実行可能領域の 1 つの端点である．

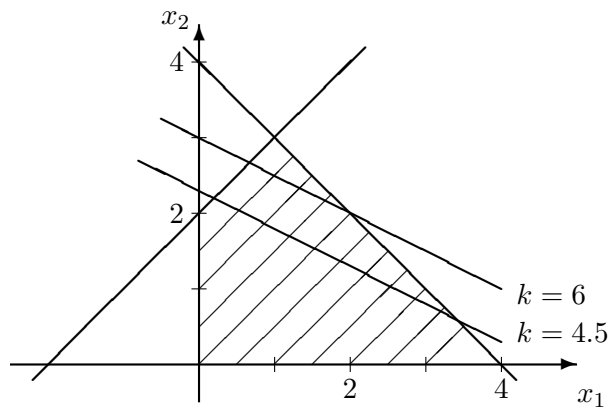


図 2.2: 目的関数

つぎに，同じ問題を標準形に書き換えて考えてみる．スラック変数 x_3, x_4 を導入して，2つの不等式を等式にすると，

目的関数： $-f(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2 \rightarrow \text{最小化}$

制約条件： _____

 $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0$

実行可能領域の境界を示す4本の直線は， $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$ に対応していることがわかる．したがって，

$$[\text{最適解の候補}] = [2 \text{ 直線の交点}] = [4 \text{ 変数のうち } 2 \text{ 変数が } 0]$$

となる．4変数のうち2変数が0となるベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ は _____ 個ある．このようなベクトル（解）を _____ という．図からわかるように，2直線の交点のうち実行可能領域に入っているのは4点のみである．このように実行可能領域に入っている基底解を _____ という．

- $(0, 0, 4, 2)$ ：実行可能基底解．このときの目的関数の値は0.
- $(0, 4, 0, -2)$ ：実行可能基底解でない．
- $(0, 2, 2, 0)$ ：実行可能基底解．このときの目的関数の値は4.
- $(4, 0, 0, 6)$ ：実行可能基底解．このときの目的関数の値は4.

- $(-2, 0, 6, 0) : \underline{\hspace{2cm}}$
- $(1, 3, 0, 0) : \underline{\hspace{2cm}}$

したがって、最適解は $\underline{\hspace{2cm}}$ で、目的関数の最大値は $\underline{\hspace{2cm}}$ であることがわかる。実際の問題の最適解はスラック変数を取り除いた $(1, 3)$ である。

ポイント： 最適解は 4 変数のうち 2 変数が 0 をとる。

2.2.2 一般の場合

標準形で書かれた問題：

目的関数： $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \text{最小化}$

制約条件： $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

を考える。変数が n 個、係数行列 $\mathbf{A}$ が $m \times n$ 行列、 $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$ とする。任意に $n - m$ 変数 $x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-m}}$ を選ぶと、他の m 変数は $x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-m}}$ によって決定できる。したがって、2 変数の場合の 2 次元平面の代わりに、 $\underline{\hspace{2cm}}$ 次元空間を考えればよい。同様に 2 変数の場合を拡張すると、

- 実行可能領域は $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ が表す n 枚の平面（境界面）によって囲まれる凸領域。
- 目的関数は平行に移動する平面。
- 最適解は実行可能領域の 1 つの端点、すなわち、 $\underline{\hspace{2cm}}$ 枚の境界面が交わる点である。

したがって、

$$[\text{最適解の候補}] = [n \text{ 変数のうち } n - m \text{ 変数が } 0]$$

である。 n 変数のうち $n - m$ 変数を 0 とした $(x_1, \dots, x_n)$ を $\underline{\hspace{2cm}}$ と呼び、それらのうち $(x_1, \dots, x_n) \geq \mathbf{0}$ を満たすものを $\underline{\hspace{2cm}}$ とよぶ。

さらに一般的に考えた場合、

- 実行可能領域が閉じていない領域となる場合がある。
- 実行可能領域が閉じていない場合、最適解が存在しない場合がある。つまり、目的関数は無限に大きく（小さく）できる。

最適解が存在しない問題を有界でないまたは非有界という．問題が有界である場合，最適解を求めるためには n 変数のうち $n - m$ 変数を 0 と置いた $(x_1, \dots, x_n)$ について目的関数を計算してみればよい．

2.3 基底形式

$$\left. \begin{array}{l} \text{目的関数: } 2x_1 + x_3 + x_4 \rightarrow \text{最小化} \\ \text{制約条件: } \begin{array}{rclcl} 3x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & 12 \\ 4x_1 & +3x_2 & +x_3 & & +x_5 & = & 8 \\ x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, & \dots, & x_5 \geq 0 \end{array} \end{array} \right\} \quad (2.1)$$

を考える．係数行列は

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$\text{rank } \mathbf{A} = 2$ より，5 つの変数のうち 2 変数は残りの 3 変数によって決定される．たとえば， x_4, x_5 は

$$\begin{aligned} x_4 &= \underline{\hspace{4cm}} \\ x_5 &= \underline{\hspace{4cm}} \end{aligned}$$

によって与えられる．また，目的関数の中にあられる x_4 に上式を代入することによって，目的関数も x_1, x_2, x_3 の 3 つの変数で書き表すことができる：

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 + x_4 &= 2x_1 + x_3 + (\underline{\hspace{4cm}}) \\ &= \underline{\hspace{4cm}} \end{aligned}$$

一般に， n 変数， m 制約条件式の場合，任意の m 個の変数 $\mathbf{x}_B = (x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$ と目的関数は，残りの $n - m$ 個の変数 $\mathbf{x}_N = (x_{i_{m+1}}, \dots, x_{i_n})$ によって表すことができる． $\mathbf{x}_B$ に含まれる m 個の変数を _____， $\mathbf{x}_N$ に含まれる $m - n$ 個の変数を _____ と呼ぶ．ある非基底変数に対して，基底変数と目的関数がすべて非基底変数だけで表されている標準形を _____ という．

ポイント： 目的関数と m 個の基底変数は， $m - n$ 個の非基底変数によってあらわすことができる．

ある非基底変数を選択したときに，基底変数や目的関数がどのように表されるのか，行列表示を用いて見てみよう．標準形で表された問題：

$$\begin{aligned} \text{目的関数: } & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \text{最小化} \\ \text{制約条件: } & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

を考える． n 次元の変数ベクトル $\mathbf{x}$ を2つのベクトル： $\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N$ に分け，また $m \times n$ の係数行列： $\mathbf{A}$ を，基底変数部分の $m \times m$ 行列： $\mathbf{B}$ と非基底部分の $m \times (n - m)$ 行列： $\mathbf{N}$ に分けると，制約条件は

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{N}\mathbf{x}_N + \mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$$

となる． $\mathbf{B}$ が正則行列であるから

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N$$

と書ける．また，費用ベクトル $\mathbf{c}$ も2つのベクトル $\mathbf{c}_B, \mathbf{c}_N$ に分けることにより目的関数は

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N + \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B \\ &= \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N + \mathbf{c}_B^T (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N) \\ &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\mathbf{x}_N \end{aligned}$$

と書ける．

基底解とそのときの目的関数の値は _____ 個の変数を 0 としたものであるので，
_____ をすべて 0 に，つまり $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ として，

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_B &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ f(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

で得られる． $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ であるとき，基底変数は全て非負になるので，この基底解は実行可能である．

また，

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\mathbf{x}_N$$

より，現在得られている実行可能基底解の最適性については下記が言える．

- $(\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}) \geq \mathbf{0}$ のとき： $\mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}$ より，目的関数が最小となるのは $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ のときである．したがって，現在得られている基底解は _____

_____ ．

- $(\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})_i < 0$ となる要素があるとき：その要素に対応する非基底変数を _____ することによって，目的関数をもっと _____ することができる．

$(\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}) \geq \mathbf{0}$ が現在の基底の最適性の条件であり，これを用いればすべての実行可能基底解について目的関数の値を計算しなくとも，最適であるかどうかを判断することができる．

[課題 2.2] 式 2.1 で与えられた問題を基底形式に書き直しなさい．基底変数，非基底変数，基底解，基底解における目的関数の値をそれぞれ求めなさい．さらに，基底解が最適であるかを答えなさい（判断理由は？）．