付 録A　演習問題・課題の解答

A.1　第1回目の演習問題の解答

1.　工場 B_i から取引先 A_j へ輸送する量を x_{ij}（単位）とすると，

$$
\begin{aligned}
\text{目的関数：}\quad & 4x_{11}+7x_{12}+12x_{13}+11x_{21}+6x_{22}+3x_{23} \;\rightarrow\; \text{最小化} \\
\text{制約条件：}\quad & x_{11}+x_{21}=70 \\
& x_{12}+x_{22}=40 \\
& x_{13}+x_{23}=60 \\
& x_{11}+x_{12}+x_{13}=90 \\
& x_{21}+x_{22}+x_{23}=80 \\
& x_{11},x_{12},\ldots,x_{23}\geq 0
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
\text{目的関数：}\quad & (y_1+y_2)f_1(y_1+y_2)+y_3f_2(y_3)+y_2f_3(y_2)+y_1f_4(y_1) \\
& \quad +(y_2+y_3)f_5(y_2+y_3) \;\rightarrow\; \text{最小化} \\
\text{制約条件：}\quad & y_1+y_2+y_3=w \\
& y_1,y_2,y_3\geq 0
\end{aligned}
$$

3.　(a) $x_1+x_2+x_3=w,\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0.$
(b) $W=(R_1+1)x_1+(R_2+1)x_2+(R_3+1)x_3,$
　$Z=W-w=R_1x_1+R_2x_2+R_3x_3.$
(c) $u(z)=\alpha z$ のとき，

$$
\begin{aligned}
E[u(Z)] &= \alpha(E[R_1]x_1+E[R_2]x_2+E[R_3]x_3) \\
&= \alpha(r_1x_1+r_2x_2+r_3x_3)
\end{aligned}
$$

（したがって，この問題は線形計画問題となる.）

(d) $u(z) = z - \beta z^2$ のとき，

$$\begin{aligned}\sigma_i &= E[(R_i - r_i)^2] \\ &= E[R_i^2] - 2r_iE[R_i] + r_1^2 = E[R_i^2] - r_i^2 \\ \sigma_{ij} &= E[(R_i - r_i)(R_j - r_j)] \\ &= E[R_i r_j] - r_iE[R_j] - r_jE[R_i] + r_ir_j \\ &= E[R_iR_j] - r_ir_j\end{aligned}$$

に注意すれば，

$$\begin{aligned}E[u(Z)] &= E[R_1x_1 + R_2x_2 + R_3x_3 - \beta(R_1^2x_1^2 + R_2^2x_2^2 + R_3^2x_3^2 \\ &\quad +2(R_1R_2x_1x_2 + R_1R_3x_1x_3 + R_2R_3x_2x_3))] \\ &= r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_3 - \beta((\sigma_1 + r_1^2)x_1^2 + (\sigma_2 + r_2^2)x_2^2 + (\sigma_3 + r_3^2)x_3^2) \\ &\quad -2\beta((\sigma_{12} + r_1r_2)x_1x_2 + (\sigma_{13} + r_1r_3)x_1x_3 + (\sigma_{23} + r_2r_3)x_2x_3)\end{aligned}$$

となる.（これは非線形計画問題となる.）

A.2　第 2 回目以降の課題の解答例

課題 2.1　：
(a) 最大化を最小化にするために，目的関数を (-1) 倍する.
(b) スラック変数 x_4, x_5 を導入する.
(c) $x_3 = x_3' - x_3''$ とする.
以上より，

$$\begin{array}{lllllllll}\text{目的関数:} & -x_1 - 2x_2 - x_3' + x_3'' \;\to\; \text{最小化} \\ \text{制約条件:} & x_1 & +x_2 & & & +x_4 & & = & 10 \\ & -x_1 & & +x_3' & -x_3'' & & -x_5 & = & 8 \\ & \multicolumn{8}{l}{x_1 \geq 0,\; x_2 \geq 0,\; x_3' \geq 0,\; x_3'' \geq 0,\; x_4 \geq 0,\; x_5 \geq 0}\end{array}$$

と書ける．あるいは，

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3' \\ x_3'' \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$$

とすれば,

$$\begin{aligned} &\text{目的関数：} && \mathbf{c}^T\mathbf{x} \ \rightarrow \ \text{最小化} \\ &\text{制約条件：} && \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & && \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

と書き表せる.

課題 2.2 ：
$x_4 = 12 - 3x_1 - 2x_2 - 2x_3$ を目的関数に代入すると，次の基底形式が得られる：

$$\begin{aligned} &\text{目的関数：} && -x_1 - 2x_2 - x_3 + 12 \ \rightarrow \ \text{最小化} \\ &\text{制約条件：} && 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \\ & && 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 8 \\ & && x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0, \ x_4 \geq 0, \ x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

基底変数は (x_4, x_5), 非基底変数は (x_1, x_2, x_3)，基底解は $(0, 0, 0, 12, 8)$，このときの目的関数の値は 12．これは最適解ではない．なぜなら，目的関数の非基底変数の係数が負であり，非基底変数の値を大きくすることによって，目的関数の値をもっと小さくすることができるから.

課題 3.1 ：

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	$-1/2$	0	0	$1/2$	4
x_3	2^*	0	1	-1	4
x_2	$1/2$	1	0	$1/2$	4

→

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	0	0	$1/4$	$1/4$	5
x_1	1	0	$1/2$	$-1/2$	2
x_2	0	1	$-1/4$	$3/4$	3

したがって，最適基底解は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 3, 0, 0)$，このときの目的関数の値は -5.

課題 3.2 ：

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	-1	-1	0	0	0
x_3	3^*	2	1	0	12
x_4	1	2	0	1	8

→

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	0	$-1/3$	$1/3$	0	4
x_1	1	$2/3$	$1/3$	0	4
x_4	0	$4/3^*$	$-1/3$	1	4

→

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	0	0	1/4	1/4	5
x_1	1	0	1/2	−1/2	2
x_2	0	1	−1/4	3/4	3

したがって，先ほどと同様の結果を得る.

課題 3.3 ：

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	−3	−2	0	0	0
x_3	2	1	1	0	6
x_4	1	2^*	0	1	6

→

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	−2	0	0	1	6
x_3	$3/2^*$	0	1	−1/2	3
x_2	1/2	1	0	1/2	3

→

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	0	0	4/3	1/3	10
x_1	1	0	2/3	−1/3	2
x_2	0	1	−1/3	2/3	2

したがって，最適基底解は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 2, 0, 0)$，このときの目的関数の値は -10.

課題 3.4 ：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-z$	−6	−10	−3	0	0	0	0
x_4	4	8^*	1	1	0	0	0
x_5	−1	3	2	0	1	0	0
x_6	0	1	0	0	0	1	1

→

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-z$	−1	0	−7/4	5/4	0	0	0
x_2	1/2	1	$1/8^*$	1/8	0	0	0
x_5	−5/2	0	13/8	−3/8	1	0	0
x_6	−1/2	0	−1/8	−1/8	0	1	1

→

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-z$	6	14	0	3	0	0	0
x_3	4	8	1	1	0	0	0
x_5	−8	−13	0	−2	1	0	0
x_6	0	1	0	0	0	1	1

結局，最適解は $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$，目的関数の値は $z = 0$ である.

課題 4.1 ：
(a) 人為変数 x_4, x_5 を導入.

$$\begin{aligned}
\text{目的関数：} \quad & w = x_4 + x_5 \;\rightarrow\; \text{最小化} \\
\text{制約条件：} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\
& 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\
& x_1 \geq 0,\; x_2 \geq 0,\; x_3 \geq 0,\; x_4 \geq 0,\; x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

(b)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-w$	0	0	0	1	1	0
	2	1	1	1	0	6
	2	3	2	0	1	10

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-w$	-4	-4	-3	0	0	-16
x_4	2^*	1	1	1	0	6
x_5	2	3	2	0	1	10

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-w$	0	-2	-1	2	0	-4
x_1	1	$1/2$	$1/2$	$1/2$	0	3
x_5	0	2^*	1	-1	1	4

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-w$	0	0	0	1	1	0
x_1	1	0	$1/4$	$3/4$	$-1/4$	2
x_2	0	1	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	2

人為変数が全て非基底変数であるから，このまま人為変数を除けば元の問題の初期基底解となる.

(c)

	x_1	x_2	x_3	
$-z$	3	2	0	0
	1	0	$1/4$	2
	0	1	$1/2$	2

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	
$-z$	0	0	$-7/4$	-10
x_1	1	0	$1/4$	2
x_2	0	1	$1/2^*$	2

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	
$-z$	0	7/2	0	-3
x_1	1	$-1/2$	0	1
x_3	0	2	1	4

したがって，$(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 4)$ が最適解で，$z = 3$.

課題 4.2　：

(a) 標準形に直す：

目的関数：　$z = 3x_1 + 2x_2 \ \rightarrow$ 最小化

制約条件：　$2x_1 + x_2 - x_3 = 2$

$$4x_1 + 3x_2 - x_4 = 6$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$$

しかし，初期基底解が得られていない.

(b) 人為変数 x_5, x_6 を導入する．補助問題は次のとおり：

目的関数：　$w = x_5 + x_6 \ \rightarrow$ 最小化

制約条件：　$2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2$

$$4x_1 + 3x_2 - x_4 + x_6 = 6$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0$$

(c) 補助問題をシンプレックス法で解く：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-w$	0	0	0	0	1	1	0
	2	1	-1	0	1	0	2
	4	3	0	-1	0	1	6

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-w$	-6	-4	1	1	0	0	-8
x_5	2^*	1	-1	0	1	0	2
x_6	4	3	0	-1	0	1	6

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-w$	0	-1	-2	1	3	0	-2
x_1	1	1/2	$-1/2$	0	1/2	0	1
x_6	0	1	2^*	-1	-2	1	2

→

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-w$	0	0	0	0	1	1	0
x_1	1	3/4	0	−1/4	0	1/4	3/2
x_3	0	1/2	1	−1/2	−1	1/2	1

補助問題を解いた結果 $w = 0$ となったので，人為変数を取り除いて (a) の問題の初期基底解とすることができる．

(d)

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	3	2	0	0	0
	1	3/4	0	−1/4	3/2
	0	1/2	1	−1/2	1

→

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	0	−1/4	0	3/4	−9/2
x_1	1	3/4*	0	−1/4	3/2
x_3	0	1/2	1	−1/2	1

→

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	1/3	0	0	2/3	−4
x_2	4/3	1	0	−1/3	2
x_3	−2/3	0	1	−1/3	0

したがって，(a) の問題の最適解は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 2, 0, 0)$.

(e) スラック変数を除くと，与えられた問題の最適解は $(x_1, x_2) = (0, 2)$，このときの目的関数の値は $z = 4$.

課題 4.3 ：

初期基底解が得られていないので，補助問題を作る：

目的関数： $w = x_4 + x_5 \ \rightarrow$ 最小化

制約条件： $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$

$2x_1 + 3x_2 + 2x_4 + x_5 = 6$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-w$	0	0	0	1	1	0
	2	1	1	1	0	10
	2	3	2	0	1	6

→

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-w$	−4	−4	−3	0	0	−16
x_4	2	1	1	1	0	10
x_5	2*	3	2	0	1	6

→

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-w$	0	2	1	0	2	-4
x_4	0	-2	-1	1	-1	4
x_1	1	$3/2$	1	0	$1/2$	3

w の最小値は 4 で，0 にはならない．したがって，与えられた問題は，実行可能解を持たない．

課題 5.1　:

取引先 B_1 からの注文量を δ ふやした場合，新しい問題は，

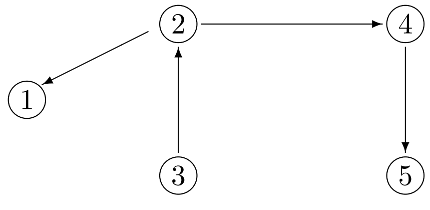
$$\begin{aligned} &\text{目的関数：} && z' = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \ \rightarrow \ \text{最小化} \\ &\text{制約条件：} && A\mathbf{x} = \mathbf{b} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{b} + \delta \mathbf{e}' \\ & && \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

となる．すると，この問題の目的関数の最小値 $\bar{z}'$ は，$\bar{z}' = \bar{z} + \delta(y^*)'_1$ となる．ただし，$(y^*)'_i$ は双対問題の最適解 $\mathbf{y}^*$ の要素．同様に考えると，B_i からの注文量を δ ふやした場合は，コストが $\delta(y^*)'_i$ だけ増えることが分かる．したがって，コスト増を最小に抑えるためには，$\min_i(y^*)'_i$ を与える B_i への注文量を増やせばよい．

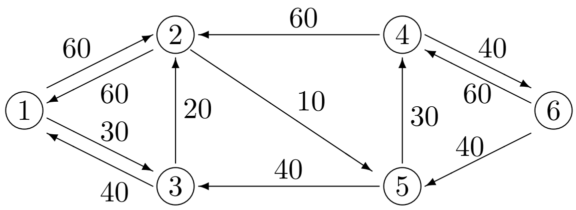
課題 6.1　:

	1	2	3	4	5
(0)	∞	∞	$\underline{0}$	∞	∞
(1)	4(3)	$\underline{2}$(3)		∞	10(3)
(2)	$\underline{3}$(2)			8(2)	10(3)
(3)				$\underline{8}$(2)	10(3)
(4)					$\underline{9}$(4)

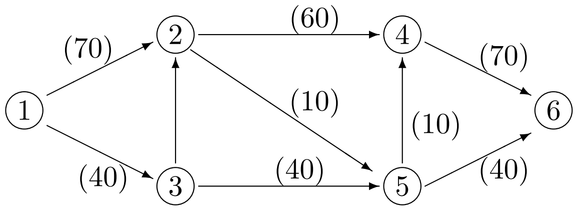
となり，最短路木は次のようになる．



課題 7.1 ：(1) 残余ネットワークは下図となる．



(2) たとえば，$1 \to 2 \to 5 \to 4 \to 6$ がフロー増加路となっている．このとき，追加できる流量は 10 で，得られたフローは次の図となる．

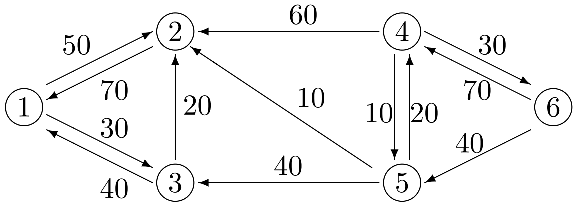


課題 7.2 ：残余ネットワークは課題 3.2 (1) のとおり．ラベリング法を用いると，

1	2	3	4	5	6
$\underline{0}$	0	0	0	0	0
	$\underline{1}$	1	0	0	0
		$\underline{1}$	0	2	0
			0	$\underline{2}$	0
			$\underline{5}$		0
					4

これより，増加路 $1 \to 2 \to 5 \to 4 \to 6$ が得られる．流量の増加したフローは課題 3.2 (2) と同じ．

課題 7.3 ：残余ネットワークは次のようになる．



これに対しラベリング法を用いると，

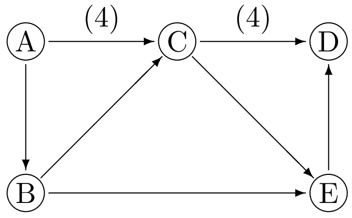
1	2	3	4	5	6
$\underline{0}$	0	0	0	0	0
	$\underline{1}$	1	0	0	0
		$\underline{1}$	0	0	0
			0	0	0

となり，$6 \notin L, S = L = \{1,2,3\}$ で終了する．したがってこれ以上流量を増やすことはできない.（最大流が求まった.）

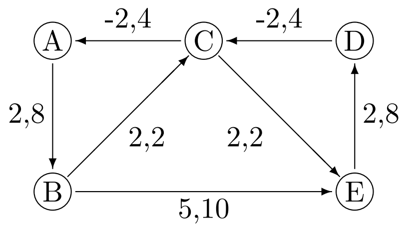
課題 8.1 ：(a) コスト（左側の値）を長さと見てダイクストラのアルゴリズムを適用すると，

A	B	C	D	E
$\underline{0}$	∞	∞	∞	∞
	$\underline{2}$(A)	2(A)	∞	∞
		$\underline{2}$(A)	∞	7(B)
			$\underline{4}$(C)	4(C)
				$\underline{4}$(C)

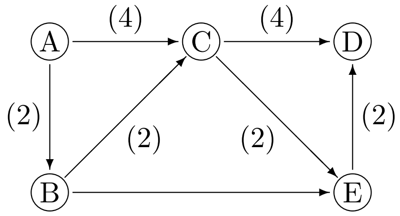
となり，D への最短路は $A \to C \to D$ であることがわかる．追加できる流量は最短路上の最小容量 $(= 4)$ である．したがって，下図のフローを得る．



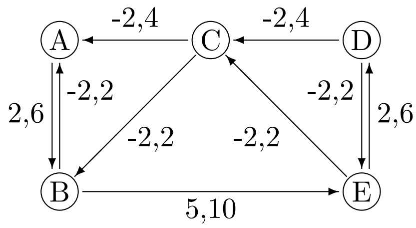
(b) 残余ネットワークは次の下図のようになる．



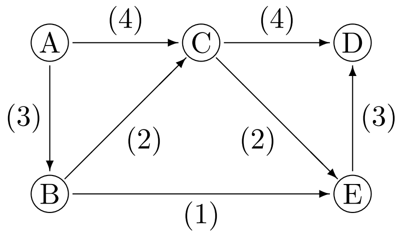
A から D への路は $(A \to B \to E \to D)$ と $(A \to B \to C \to E \to D)$ の 2 通りあるが，コストを計算すると $(A \to B \to C \to E \to D)$ が最短路であることが分かる．これにしたがいフローを追加する（追加できる量は 2）．得られたフローは次の図の通り．



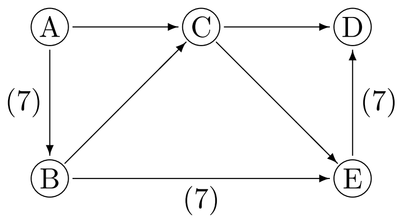
(c) 流量が足りないので，さらに残余ネットワークをつくる．



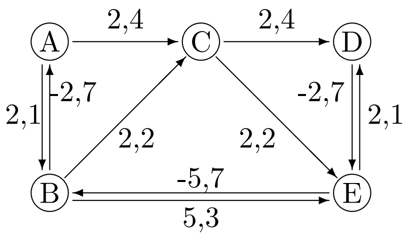
A から D への路は $(A \to B \to E \to D)$ のみであるから，これが最短路である．これにしたがいフローを追加する．追加できる量は 6 であるがフローは 1 だけ増やせばよい．最終的に得られた最小費用流は下図のとおり．



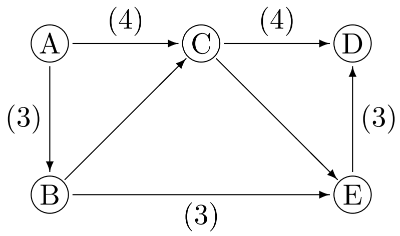
課題 8.2 ：(a) コストを考えないと，たとえば $(A \to B \to E \to D)$ に全流量（7）流すことができ，初期フローとして下図を用いることができる．



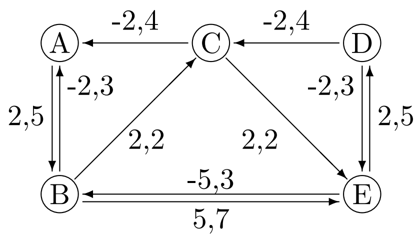
(b) 残余ネットワークを求める．



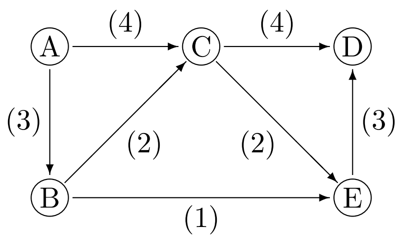
負閉路を探す．たとえば $(A \to C \to D \to E \to B \to A)$ は長さが -5 の閉路となっている．この閉路上の最小残余容量は 4 であるから，閉路へ 4 だけ流し，コストの小さいフローを得る．



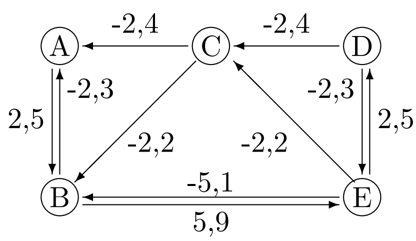
(c) 残余ネットワークを求める．



負閉路を探す．$(B \to C \to E \to B)$ は長さが -1 の閉路となっている．この閉路上の最小残余容量は 2 であるから，閉路へ流量 2 を追加するフローを得る．



(d) 残余ネットワークを求める．



これには負閉路が存在しないので，終わり．

課題 8.3 ：
課題 3.6 の (b) で得られた残余ネットワークに対してフロイド・ワーシャル法を適用すると，

				j		
	$d(i,j)$	A	B	C	D	E
	A	$0(A)$	$2(A)$	$2(A)$	$\infty(A)$	$\infty(A)$
	B	$-2(B)$	$0(B)$	$2(B)$	$\infty(B)$	$5(B)$
i	C	$\infty(C)$	$\infty(C)$	$0(C)$	$2(C)$	$2(C)$
	D	$\infty(D)$	$\infty(D)$	$\infty(D)$	$0(D)$	$-2(D)$
	E	$\infty(E)$	$-5(E)$	$\infty(E)$	$2(E)$	$0(E)$

$\Rightarrow$

				j		
	$d(i,j)$	A	B	C	D	E
	A	$\underline{0(A)}$	$\underline{2(A)}$	$\underline{2(A)}$	$\underline{\infty(A)}$	$\underline{\infty(A)}$
	B	$\underline{-2(B)}$	$0(B)$	$0(A)$	$\infty(B)$	$5(B)$
i	C	$\underline{\infty(C)}$	$\infty(C)$	$0(C)$	$2(C)$	$2(C)$
	D	$\underline{\infty(D)}$	$\infty(D)$	$\infty(D)$	$0(D)$	$-2(D)$
	E	$\underline{\infty(E)}$	$-5(E)$	$\infty(E)$	$2(E)$	$0(E)$

$\Rightarrow$

				j		
	$d(i,j)$	A	B	C	D	E
	A	$0(A)$	$\underline{2(A)}$	$2(A)$	$\infty(A)$	$7(B)$
	B	$\underline{-2(B)}$	$\underline{0(B)}$	$\underline{0(A)}$	$\underline{\infty(B)}$	$\underline{5(B)}$
i	C	$\infty(C)$	$\underline{\infty(C)}$	$0(C)$	$2(C)$	$2(C)$
	D	$\infty(D)$	$\underline{\infty(D)}$	$\infty(D)$	$0(D)$	$-2(D)$
	E	$-7(B)$	$\underline{-5(E)}$	$-5(A)$	$2(E)$	$0(E)$

$\Rightarrow$

				j		
	$d(i,j)$	A	B	C	D	E
	A	$0(A)$	$2(A)$	$\underline{2(A)}$	$4(C)$	$4(C)$
	B	$-2(B)$	$0(B)$	$\underline{0(A)}$	$2(C)$	$2(C)$
i	C	$\underline{\infty(C)}$	$\underline{\infty(C)}$	$\underline{0(C)}$	$\underline{2(C)}$	$\underline{2(C)}$
	D	$\infty(D)$	$\infty(D)$	$\underline{\infty(D)}$	$0(D)$	$-2(D)$
	E	$-7(B)$	$-5(E)$	$\underline{-5(A)}$	$-3(C)$	$-3(C)$

$\Rightarrow$

$d(i,j)$	A	B	C	D	E
i A	$0(A)$	$2(A)$	$2(A)$	$\underline{4(C)}$	$2(D)$
B	$-2(B)$	$0(B)$	$0(A)$	$\underline{2(C)}$	$0(D)$
C	$\infty(C)$	$\infty(C)$	$0(C)$	$\underline{2(C)}$	$0(D)$
D	$\underline{\infty(D)}$	$\underline{\infty(D)}$	$\underline{\infty(D)}$	$\underline{0(D)}$	$\underline{-2(D)}$
E	$-7(B)$	$-5(E)$	$-5(A)$	$\underline{-3(C)}$	$-5(D)$

$\Rightarrow$

$d(i,j)$	A	B	C	D	E
i A	$-5(B)$	$-3(E)$	$-3(A)$	$-1(C)$	$\underline{2(D)}$
B	$-7(B)$	$-5(E)$	$-5(A)$	$-3(C)$	$\underline{0(D)}$
C	$-7(B)$	$-5(E)$	$-5(A)$	$-3(C)$	$\underline{0(D)}$
D	$-9(B)$	$-7(E)$	$-7(A)$	$-5(C)$	$\underline{-2(D)}$
E	$\underline{-7(B)}$	$\underline{-5(E)}$	$\underline{-5(A)}$	$\underline{-3(C)}$	$\underline{-5(D)}$

対角要素を見ると，負閉路があることが分かる．たとえば，A から A への閉路 ($A \to C \to D \to E \to B \to A$) を得ることができる．

同様に (c) の残余ネットワークに適用すると

$d(i,j)$	A	B	C	D	E
i A	$0(A)$	$2(A)$	$\infty(A)$	$\infty(A)$	$\infty(A)$
B	$-2(B)$	$0(B)$	$2(B)$	$\infty(B)$	$5(B)$
C	$-2(C)$	$\infty(C)$	$0(C)$	$\infty(C)$	$2(C)$
D	$\infty(D)$	$\infty(D)$	$-2(D)$	$0(D)$	$-2(D)$
E	$\infty(E)$	$-5(E)$	$\infty(E)$	$2(E)$	$0(E)$

$\Rightarrow$

$d(i,j)$	A	B	C	D	E
i A	$\underline{0(A)}$	$\underline{2(A)}$	$\underline{\infty(A)}$	$\underline{\infty(A)}$	$\underline{\infty(A)}$
B	$\underline{-2(B)}$	$0(B)$	$2(B)$	$\infty(B)$	$5(B)$
C	$\underline{-2(C)}$	$0(A)$	$0(C)$	$\infty(C)$	$2(C)$
D	$\underline{\infty(D)}$	$\infty(D)$	$-2(D)$	$0(D)$	$-2(D)$
E	$\underline{\infty(E)}$	$-5(E)$	$\infty(E)$	$2(E)$	$0(E)$

$\Rightarrow$

			j		
$d(i,j)$	A	B	C	D	E
A	$0(A)$	$\underline{2(A)}$	$4(B)$	$\infty(A)$	$7(B)$
B	$\underline{-2(B)}$	$\underline{0(B)}$	$\underline{2(B)}$	$\underline{\infty(B)}$	$\underline{5(B)}$
i C	$-2(C)$	$\underline{0(A)}$	$0(C)$	$\infty(C)$	$2(C)$
D	$\infty(D)$	$\underline{\infty(D)}$	$-2(D)$	$0(D)$	$-2(D)$
E	$-7(B)$	$\underline{-5(E)}$	$-3(B)$	$2(E)$	$0(E)$

$\Rightarrow$

			j		
$d(i,j)$	A	B	C	D	E
A	$0(A)$	$2(A)$	$\underline{4(B)}$	$\infty(A)$	$6(C)$
B	$-2(B)$	$0(B)$	$\underline{2(B)}$	$\infty(B)$	$4(C)$
i C	$\underline{-2(C)}$	$\underline{0(A)}$	$\underline{0(C)}$	$\underline{\infty(C)}$	$\underline{2(C)}$
D	$-4(C)$	$2(A)$	$\underline{-2(D)}$	$0(D)$	$-2(D)$
E	$-7(B)$	$-5(E)$	$\underline{-3(B)}$	$2(E)$	$-1(C)$

$\Rightarrow$

			j		
$d(i,j)$	A	B	C	D	E
A	$0(A)$	$2(A)$	$4(B)$	$\underline{\infty(A)}$	$6(C)$
B	$-2(B)$	$0(B)$	$2(B)$	$\underline{\infty(B)}$	$4(C)$
i C	$-2(C)$	$0(A)$	$0(C)$	$\underline{\infty(C)}$	$2(C)$
D	$\underline{-4(C)}$	$\underline{2(A)}$	$\underline{-2(D)}$	$\underline{0(D)}$	$\underline{-2(D)}$
E	$-7(B)$	$-5(E)$	$-3(B)$	$\underline{2(E)}$	$-1(C)$

$\Rightarrow$

			j		
$d(i,j)$	A	B	C	D	E
A	$-1(B)$	$1(E)$	$3(B)$	$8(E)$	$\underline{6(C)}$
B	$-3(B)$	$-1(E)$	$1(B)$	$6(E)$	$\underline{4(C)}$
i C	$-5(B)$	$-3(E)$	$-1(B)$	$4(E)$	$\underline{2(C)}$
D	$-9(B)$	$-7(E)$	$-5(B)$	$0(D)$	$\underline{-2(D)}$
E	$\underline{-7(B)}$	$\underline{-5(E)}$	$\underline{-3(B)}$	$\underline{2(E)}$	$\underline{-1(C)}$

負閉路は $(B \to C \to E \to B)$.

同様に (d) の残余ネットワークに適用すると

			j		
$d(i,j)$	A	B	C	D	E
A	$0(A)$	$2(A)$	$\infty(A)$	$\infty(A)$	$\infty(A)$
B	$-2(B)$	$0(B)$	$\infty(B)$	$\infty(B)$	$5(B)$
i C	$-2(C)$	$-2(C)$	$0(C)$	$\infty(C)$	$\infty(C)$
D	$\infty(D)$	$\infty(D)$	$-2(D)$	$0(D)$	$-2(D)$
E	$\infty(E)$	$-5(E)$	$-2(E)$	$2(E)$	$0(E)$

$\Rightarrow$

			j		
$d(i,j)$	A	B	C	D	E
A	$\underline{0(A)}$	$\underline{2(A)}$	$\underline{\infty(A)}$	$\underline{\infty(A)}$	$\underline{\infty(A)}$
B	$\underline{-2(B)}$	$0(B)$	$\infty(B)$	$\infty(B)$	$5(B)$
i C	$\underline{-2(C)}$	$-2(C)$	$0(C)$	$\infty(C)$	$\infty(C)$
D	$\underline{\infty(D)}$	$\infty(D)$	$-2(D)$	$0(D)$	$-2(D)$
E	$\underline{\infty(E)}$	$-5(E)$	$-2(E)$	$2(E)$	$0(E)$

$\Rightarrow$

			j		
$d(i,j)$	A	B	C	D	E
A	$0(A)$	$\underline{2(A)}$	$\infty(A)$	$\infty(A)$	$7(B)$
B	$\underline{-2(B)}$	$\underline{0(B)}$	$\underline{\infty(B)}$	$\underline{\infty(B)}$	$\underline{5(B)}$
i C	$-4(B)$	$\underline{-2(C)}$	$0(C)$	$\infty(C)$	$3(B)$
D	$\infty(D)$	$\underline{\infty(D)}$	$-2(D)$	$0(D)$	$-2(D)$
E	$-7(B)$	$\underline{-5(E)}$	$-2(E)$	$2(E)$	$0(E)$

$\Rightarrow$

			j		
$d(i,j)$	A	B	C	D	E
A	$0(A)$	$2(A)$	$\underline{\infty(A)}$	$\infty(A)$	$7(B)$
B	$-2(B)$	$0(B)$	$\underline{\infty(B)}$	$\infty(B)$	$5(B)$
i C	$\underline{-4(B)}$	$\underline{-2(C)}$	$\underline{0(C)}$	$\underline{\infty(C)}$	$\underline{3(B)}$
D	$-6(B)$	$-4(C)$	$\underline{-2(D)}$	$0(D)$	$-2(D)$
E	$-7(B)$	$-5(E)$	$\underline{-2(E)}$	$2(E)$	$0(E)$

$$
\Rightarrow \quad
\begin{array}{cc|ccccc}
 & & & & j & & \\
 & d(i,j) & A & B & C & D & E \\
\hline
 & A & 0(A) & 2(A) & \infty(A) & \underline{\infty(A)} & 7(B) \\
 & B & -2(B) & 0(B) & \infty(B) & \underline{\infty(B)} & 5(B) \\
i & C & -4(B) & -2(C) & 0(C) & \underline{\infty(C)} & 3(B) \\
 & D & \underline{-6(B)} & \underline{-4(C)} & \underline{-2(D)} & 0(D) & \underline{-2(D)} \\
 & E & -7(B) & -5(E) & -2(E) & \underline{2(E)} & 0(E)
\end{array}
$$

$$
\Rightarrow \quad
\begin{array}{cc|ccccc}
 & & & & j & & \\
 & d(i,j) & A & B & C & D & E \\
\hline
 & A & 0(A) & 2(A) & 5(E) & 9(E) & \underline{7(B)} \\
 & B & -2(B) & 0(B) & 3(E) & 7(E) & \underline{5(B)} \\
i & C & -4(B) & -2(C) & 0(C) & 5(E) & \underline{3(B)} \\
 & D & -9(B) & -7(E) & -4(E) & 0(D) & \underline{-2(D)} \\
 & E & \underline{-7(B)} & \underline{-5(E)} & \underline{-2(E)} & \underline{2(E)} & \underline{0(E)}
\end{array}
$$

対角成分を見ると，全て 0 となっており，負閉路は存在しないことがわかる．

課題 11.1 ：

欲張り法は考え方が単純であり，解を求める計算量が少ないことが長所である．短所は，最適解が得られる問題は限られていることである.（最適解が得られない問題においては，近似解を求めるのに欲張り法が用いられる.）

課題 11.2 ：

0-1 問題は解が 0 または 1 のみをとりうるという制約の付いた最適化問題であるが，この制約を，0 から 1 の間の任意の実数をとるという制約に変えた（制約を緩和した）問題が連続緩和問題である．

連続緩和問題の実行可能解は 0-1 問題の実行可能解を全て含んでいるため，最小化問題の場合，連続緩和問題の最適解における目的関数の値（最小値）は，常に 0-1 問題の最適解における目的関数の値よりも小さく（あるいは等しく）なる．

課題 11.3 ：

分枝操作によって得られた部分問題を条件によって終端させ，**限定**された部分問題のみに対してさらなる**分枝**操作を行うので,「分枝限定法」という．

課題 11.4 ：

動的計画法

課題 11.5　:
厳密な最適解を求めることが困難である問題に対して，近似解を比較的短い時間で求める解法がヒューリスティック解法である．

　また，近似解に修正を（繰り返し）加えることによって，より良い近似解を得る方法がメタヒューリスティックスである．

課題 12.1　:
最適解：$\mathbf{x}^* = (0,0)$ に対して，

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 8x_2^3 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 24x_2^2 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{固有値は } 2, 0$$

となる．したがって，１次，２次の必要条件は満たしているが，2 次の十分条件を満たしていない．

課題 12.2　:
$\mathbf{x}^* = (0,0)$ に対して，

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 6x_2^2 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{固有値は } 2, 0$$

となる．したがって課題 5.1 と同様，１次，２次の必要条件は満たしているが，2 次の十分条件を満たしていない．しかし，課題 5.1 の $\mathbf{x}^*$ は最適解であったのに対し，この問題では $\mathbf{x}^*$ は最適解ではないことに注意.（x_2 を無限に大きくすれば目的関数はいくらでも小さくすることができ，非有界である.）