期末試験に関する注意事項

2/9 午前 10:40 から (時間割参照)

やむを得ぬ事情で遅刻・欠席した場合は、事情を証明する**公的な証明書** (例えば病気の診断書や駅で配られる電車の遅延証明書など) を添えて申し出ること。証明書が無い欠席や大幅な遅刻は原則として期末試験の評価を0点にする。

前回までの授業でやったこと

- 文脈自由文法 G を与えられたときに、 $L(G) = T(M)$ となる NPDA M を構成できる
- NPDA M が与えられたときに $T(M) = L(G)$ となる文脈自由文法 G を構成できる

今回はこれらの事実を用いて文脈自由文法の性質を調べる

共通集合１

二つの正規言語の共通集合は正規言語であったが、文脈自由言語ではどうか？

二つの文脈自由文法の共通集合が文脈自由文法ではないことがある。
例： $L_1 = \{a^m b^m c^n \mid m, n \geq 0\}$,
$L_2 = \{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 0\}$ は文脈自由言語である (演習問題で確認してもらう)。しかし

$$L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

は文脈自由言語ではないことをポンプの補題のときに例として説明した

共通集合 2

定理：文脈自由言語 L 正規言語 R が与えられたとき $L \cap R$ も文脈自由言語である。

証明： L を受理する NPDA を
$M_1 = (K_1, T_1, V, p, q_1, \perp, F_1)$,
R を受理する DFA を $M_2 = (K_2, T_2, t, q_2, F_2)$ とする。

NPDA $M = (K_1 \times K_2, T_1 \cap T_2, V, p', (q_1, q_2), \perp, F_1 \times F_2)$
$(q, q') \in K_1 \times K_2$, $a \in T_1 \cap T_2$, $A \in V$ に対して
$p'((q, q'), a, A) = \{((q_1, q_1'), \alpha) \mid p(q, a, A) = (q_a, \alpha), t(q', a) = q_1\}$,
$p'((q, q'), \epsilon, A) = \{((q_1, q'), \alpha) \mid p(q, \epsilon, A) = (q_1, \alpha)\}$
とすると、 $T(M) = R \cap L$ である。

なぜならば、ある系列が M_1 と M_2 の両方で受理されたときだけ M で受理されるので。

和集合、連接、クリーネ閉包

L_1, L_2 を文脈自由言語とする。このとき $L_1 \cup L_2$, $L_1 L_2$, L_1^* は文脈自由言語である。

証明は正規言語のときと同じようにできる (演習問題)

今まで説明したことから、 補集合が文脈自由言語にならない文脈自由言語が存在することがわかる (演習問題)

空問題

文脈自由文法 $G = (N, T, P, S)$ が与えられたときに $L(G)$ が空集合かどうか判定する問題を空問題と呼ぶ。
非終端記号 A を書き換えて終端記号だけからなる列を導出できるとき、A を生成的記号と呼ぶ。
$L(G) \neq \emptyset \Longleftrightarrow S$ が生成的記号

G に対してその生成的記号の集合を求める手順
1. 集合 U を終端記号の集合 T とする。
2. P の各々の生成規則 $A \to \alpha$ についてもし $\alpha \in U^*$ ならば A を U に追加する
3. すべての生成規則を調べた後 U に付け加えた非終端記号があれば2に戻る。もう U に付け加える非終端記号が無ければ終り

最後に S が U に含まれているかどうか調べる

包含関係の決定

定理：任意の文脈自由言語 L_1, L_2 について $L_1 \subseteq L_2$ であるかどうか決定するアルゴリズムは存在しない
証明：今まで説明した知識の範囲では簡単にできない。興味のある人は「オートマトン，言語理論，計算論 II」の p. 106 を参照

定理：文脈自由言語 L と正規言語 R について $L \subseteq R$ であるかどうかは決定可能。
証明：R の補集合と L の共通部分が空集合かどうか調べればよい

所属問題

定理：文脈自由文法 G と記号列 w が与えられたときに $w \in L(G)$ であるかどうかは決定可能である。

$w = \epsilon$ の場合は $L(G) \cap \{\epsilon\}$ が空集合かどうか調べれば良い (あるいは G の開始記号が ϵ 生成記号かどうか調べても良い)

$w \neq \epsilon$ とする。まず $L(G) \setminus \{\epsilon\}$ のチョムスキー標準形 G' を求める。その後長さ $|w|$ 以下の $L(G')$ の要素をすべて生成して w と同じかどうか比較する

有限問題

ポンプの補題の復習：
L が文脈自由言語で $L \setminus \{\epsilon\}$ を生成するチョムスキー標準形が m 個の非終端記号を持つならば、$|z| \geq 2^m$ である L の記号列 z について以下の条件を満たす記号列 u, v, w, x, y が存在する

1. $z = uvwxy$
2. $|vx| \geq 1$
3. $|vwx| \leq 2^m$
4. すべての $i \geq 0$ について $uv^iwx^iy \in L$

正規言語のポンプの補題のときと同様に
「$L(G)$ が無限集合」 $\Longleftrightarrow$ 「$L(G)$ は長さ 2^m 以上 2^{m+1} 以下の要素を含む」
ということを証明できる (演習問題)。

したがって長さ 2^m 以上 2^{m+1} 以下の要素を生成できるかどうかしらみ潰しに調べればよい

演習問題解説

問題 64 は教科書 109 ページの証明の間違いを探す問題だった。少なくとも以下のような間違いがある。研究者や技術者が規格書や論文に書いてある間違っていることをそのまま使うと、時間が無駄になったり金を損することがある。従って、間違った記述の間違いをそのまま信じずに間違いに気が付くことが重要である。

109 ページ下から 6 行目：$p(k_i, A, a)$, $k_i \in K$, $A \in V$, $a \in T \cup \{\epsilon\}$ が $(k_j,\ B_1B_2\cdots B_m)$, $k_j \in K$, B_1, B_2, $\cdots$, $B_m \in V$ を含むとき、生成規則

$$A^{ij} \to aB_1^{in_1}B_2^{n_1n_2}\cdots B_m^{n_mj}$$

を $1 \leq n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_{m-1} \leq n$ のすべてに対してつくる。

・上の部分で $B_1^{in_1}B_2^{n_1n_2}\cdots B_m^{n_mj}$ は状態 k_j から k_j に遷移する間に消されるので、$B_1^{in_1}$ は $B_1^{jn_1}$ でなければならない。

・$p(k_i, A, a)$ が $(k_\ell,\ B_1B_2\cdots B_m)$ を含む、言い替えると k_i から k_ℓ に遷移した後 k_j に到達する場合が抜けている

110 ページ 1 行目： A^{1n} は A_1^{1n} であるべき

演習問題

次回で最後の授業の予定ですが、今回の演習の返却は期末試験の後になる予定です。以下の演習の類題は期末試験では出さない予定。

問題 66 $L_1 = \{a^m b^m c^n \mid m, n \geq 0\}$,
$L_2 = \{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 0\}$ は文脈自由言語であることをどういう方法でも良いので証明せよ。

問題 67 L_1, L_2 を文脈自由言語とする。このとき $L_1 \cup L_2$ は文脈自由言語であることを証明せよ。(ヒント：正規言語の場合に L_1 を受理する NFA M_1 と L_2 を受理する NFA M_2 から $L_1 \cup L_2$ を受理する ϵ-NFA を作った方法と同じような方法で証明できる。)

問題 68 補集合が文脈自由言語にならない文脈自由言語が存在することを証明するために、全ての文脈自由言語の補集合が文脈自由言語であると仮定して矛盾を導け。(ヒント：共通集合を和集合と補集合を用いて表せることを使って矛盾を導ける)

問題 69 直前の OHP に出て来た「$L(G)$ が無限集合」$\Longleftrightarrow$「$L(G)$ は長さ 2^m 以上 2^{m+1} 以下の要素を含む」を証明せよ