

NPDA と文脈自由文法の等価性

今回から 2 回にわたり,

1. 任意の文脈自由言語 L が与えられたとき L を受理する NPDA を構成することができる
2. 任意の NPDA M が与えられたときに $T(M)$ は文脈自由言語である

を説明する.

上の 2 つの事実から, NPDA は文脈自由言語を受理する機械であることがわかる

文脈自由言語を受理する NPDA の構成 1

スタックの文字列を残りの記号列を生成する文型 (開始記号から導出される非終端記号および終端記号の列) になるように NPDA を作る

例: $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$,
 $P = \{S \rightarrow \epsilon | a | b | aSa | bSb\}$

最初にスタックに S を積み, スタックを

S
$\perp$

 にする

スタックトップが S ならば S から 1 回の書き換えで導出される文型のどれか一つをスタックに積む. 積み込まれた後の状態は

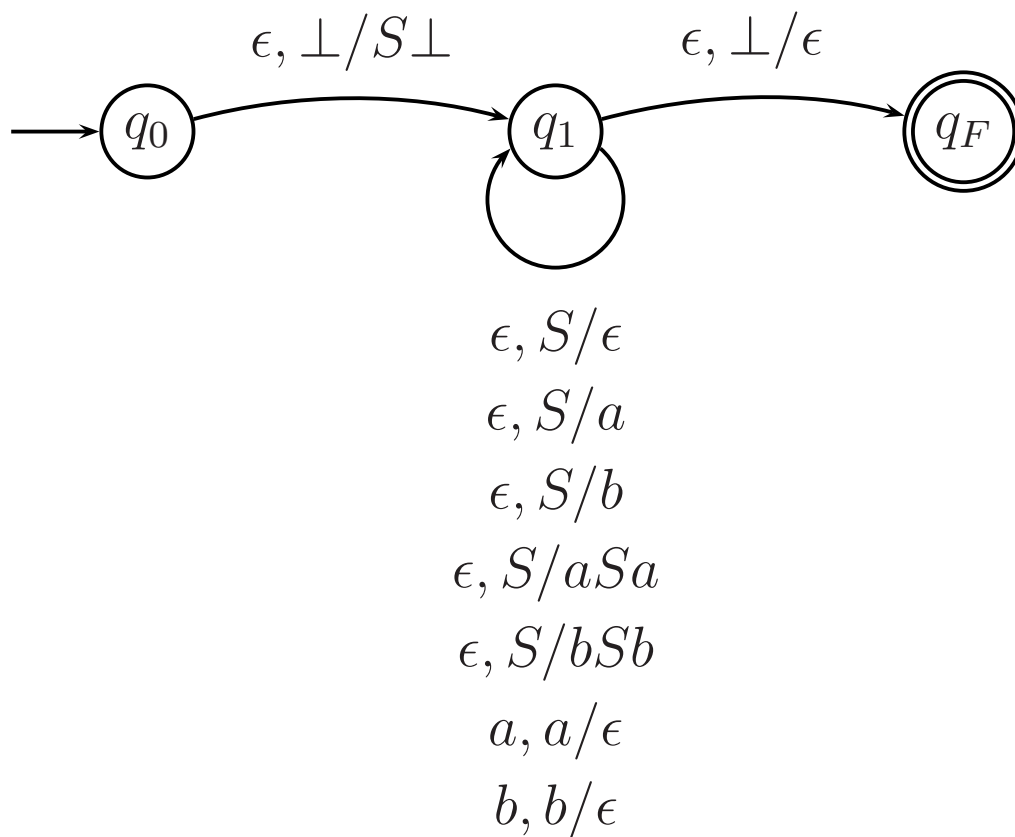
<table><tr><td>$\perp$</td></tr></table> 入力終了	$\perp$	<table><tr><td>a</td></tr><tr><td>$\perp$</td></tr></table> a 待ち	a	$\perp$	<table><tr><td>b</td></tr><tr><td>$\perp$</td></tr></table> b 待ち	b	$\perp$	<table><tr><td>a</td></tr><tr><td>S</td></tr><tr><td>a</td></tr><tr><td>$\perp$</td></tr></table> aSa 待ち	a	S	a	$\perp$	<table><tr><td>b</td></tr><tr><td>S</td></tr><tr><td>b</td></tr><tr><td>$\perp$</td></tr></table> bSb 待ち	b	S	b	$\perp$
$\perp$																	
a																	
$\perp$																	
b																	
$\perp$																	
a																	
S																	
a																	
$\perp$																	
b																	
S																	
b																	
$\perp$																	

スタックトップが終端記号 a で, 記号列の次の 1 文字が a ならばスタックを pop する. 記号 b についても同様

スタックトップが $\perp$ ならば最終状態に遷移する

文脈自由言語を受理する NPDA の構成 2

前 OHP の NPDA を図示すると



記号列を受理する例:

$$\begin{aligned}(q_0, abba, \perp) &\vdash (q_1, abba, S\perp) \\ &\vdash (q_1, abba, aSa\perp) \\ &\vdash (q_1, bba, Sa\perp) \\ &\vdash (q_1, bba, bSba\perp) \\ &\vdash (q_1, ba, Sba\perp) \\ &\vdash (q_1, ba, ba\perp) \\ &\vdash (q_1, a, a\perp) \\ &\vdash (q_1, \epsilon, \perp) \\ &\vdash (q_F, \epsilon, \epsilon)\end{aligned}$$

文脈自由言語を受理する NPDA の構成 3

一般の文脈自由文法を NPDA に変換する方法：

$G = (N, T, P, S)$ に対して $L(G)$ を受理する NPDA M は以下のように作ることができる

$$M = (K, T, V, p, q_0, \perp, F)$$

$$K = \{q_0, q_1, q_F\}$$

T は G の T と同じ

$$V = N \cup T \cup \{\perp\} \text{ (但し } \perp \notin N \cup T \text{ を仮定)}$$

$$F = \{q_F\}$$

$$p(q_0, \epsilon, \perp) = \{(q_1, S\perp)\}$$

$$p(q_1, a, a) = \{(q_1, \epsilon)\} \text{ for each } a \in T$$

$$p(q_1, \epsilon, A) = \{(q_1, \alpha) \mid A \rightarrow \alpha \in P\} \text{ for each } A \in N$$

$$p(q_1, \epsilon, \perp) = \{(q_F, \epsilon)\}$$

(値が空集合になっている引数は省略することが多いので、そうします)

$T(M) = N(M')$ となる M' の構成 1

NPDA から文脈自由文法を構成するするときに、NPDA の受理が空スタックにより行われると作りやすい

今まで受理は最終状態で記号列を読み切るにより行われたが、最終状態で受理する NPDA を空スタックで受理する NPDA に変換する方法を説明する

$T(M) = N(M')$ となる M' の構成 2

元の NPDA $M = (K, T, V, p, q_0, \perp, F)$, 但し $q'_0, q'_F \notin K, \perp' \notin V$ を仮定. これを元に $T(M) = N(M')$ となる NPDA $M' = (K \cup \{q'_0, q'_F\}, T, V \cup \{\perp'\}, p', \perp')$ の遷移関数 p' を作る

1. M' の開始状態 q'_0 で記号を読まずスタックに $\perp\perp'$ を積んで q_0 に状態遷移
2. 元の NPDA M の最終状態集合 F に属する状態になったら非決定的に q'_F に遷移する
3. q'_F ではスタックが空になるまで pop する
それ以外の動作は p と同じ. 空スタックで受理するので, 最終状態の集合はどうでもよい

上記のことを記号で厳密に書くと

$$p'(q'_0, \epsilon, \perp') = (q_0, \perp\perp')$$

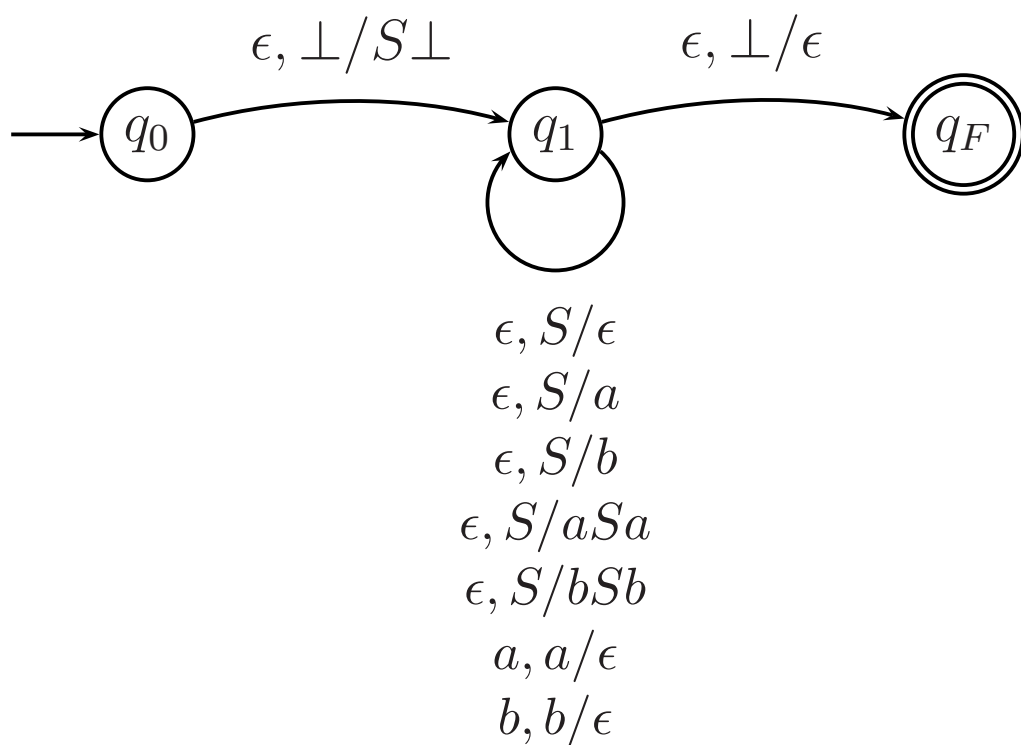
$$p'(q, a, A) = p(q, a, A) \text{ (if } q \in K, a \in T \cup \{\epsilon\}, A \in V)$$

$$p'(q, \epsilon, A) = p(q, \epsilon, A) \text{ (if } q \in K \setminus F, A \in V)$$

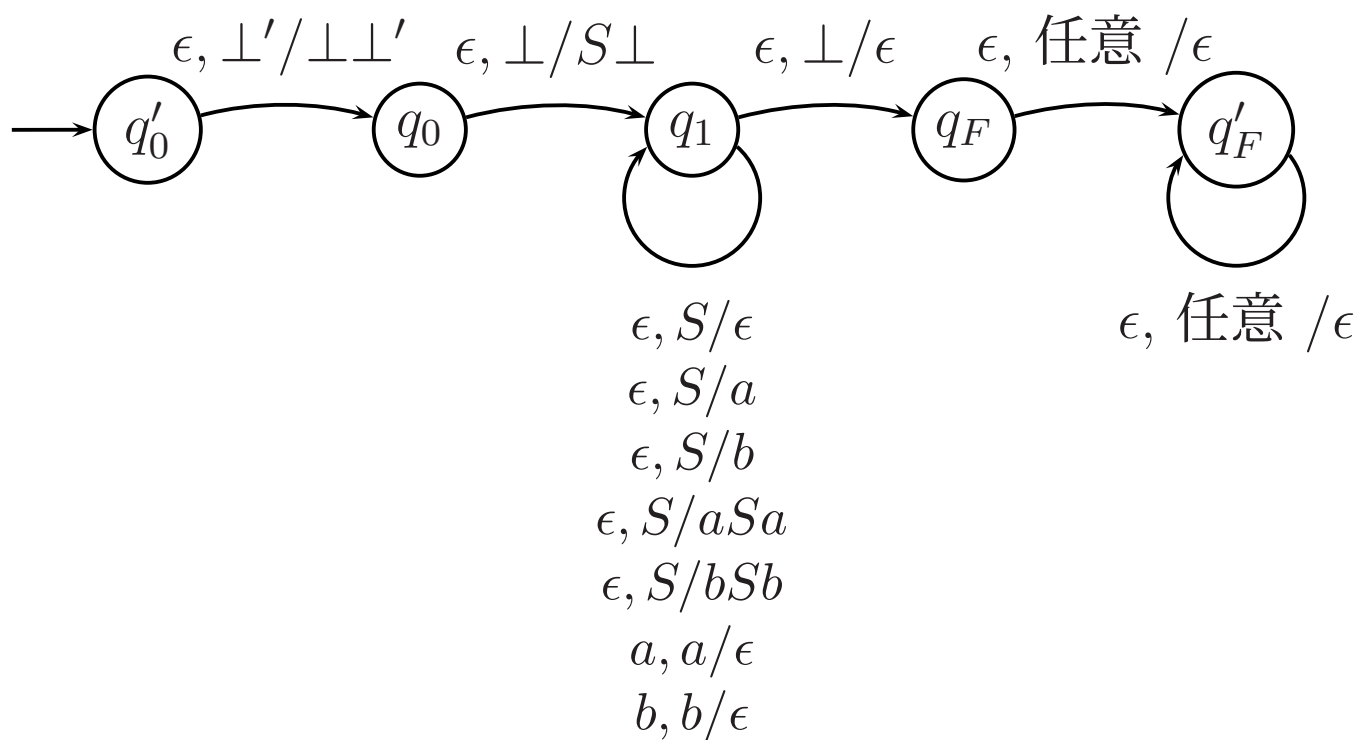
$$p'(q, \epsilon, A) = p(q, \epsilon, A) \cup (q'_F, \epsilon) \text{ (if } q \in F, A \in V \cup \{\perp'\})$$

$$p'(q'_F, \epsilon, A) = (q'_F, \epsilon)$$

$T(M) = N(M')$ となる M' の構成の例



上記 NPDA を変換すると



演習問題

問題 60 文脈自由文法 $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$,
 $P = \{S \rightarrow aA|aBB, A \rightarrow Ba|Sb, B \rightarrow bAS|\epsilon\}$ を受
理する NPDA を作れ.

問題 61 問 60 で作成した NPDA が記号列 $abaaaa$ を
受理する過程を時点表示で書け

問題 62 $M = (\{q_0, q_F\}, \{0, 1\}, \{X, \perp\}, p, q_0, \perp, \{q_F\})$,

$$p(q_0, 0, \perp) = \{(q_0, X\perp)\}$$

$$p(q_0, 0, X) = \{(q_0, XX)\}$$

$$p(q_0, 1, X) = \{(q_0, X)\}$$

$$p(q_0, \epsilon, X) = \{(q_F, \epsilon)\}$$

$$p(q_F, \epsilon, X) = \{(q_F, \epsilon)\}$$

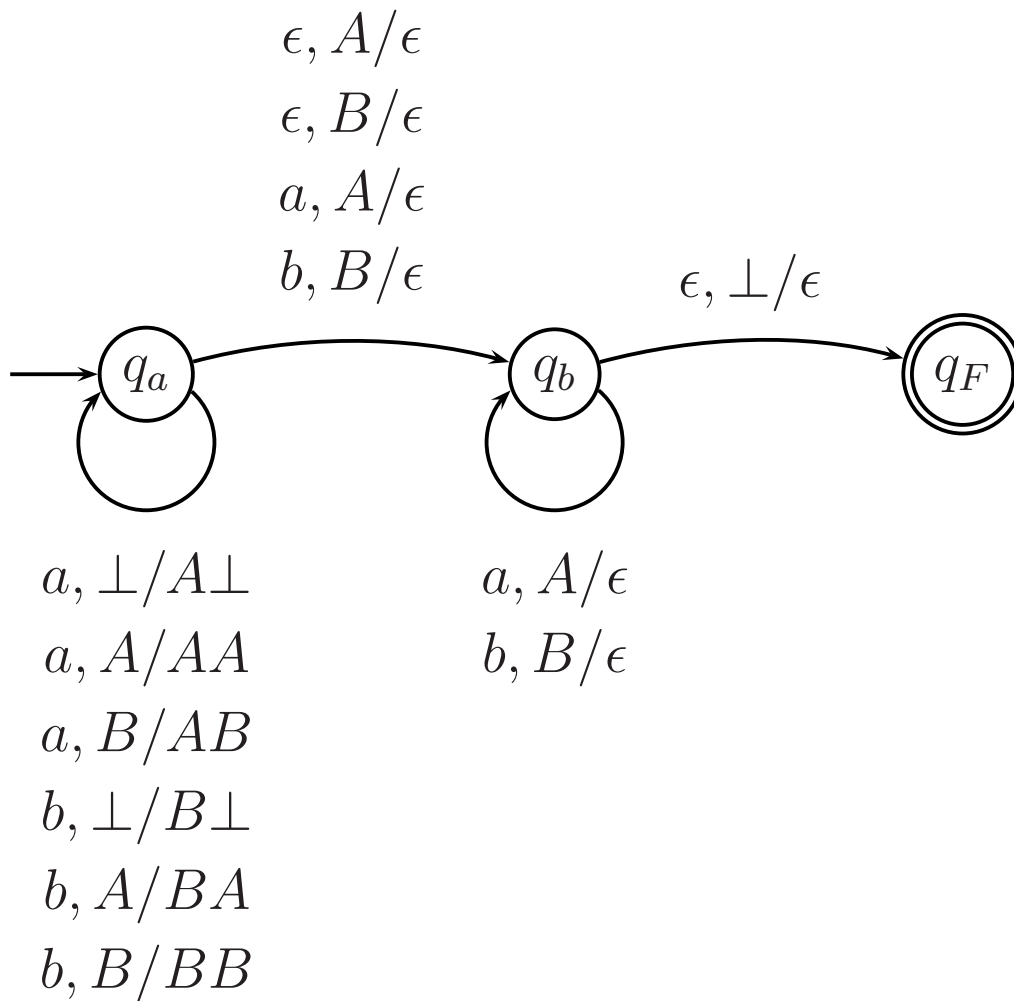
$$p(q_F, 1, X) = \{(q_F, XX)\}$$

$$p(q_F, 1, \perp) = \{(q_F, \epsilon)\}$$

で与えられる NPDA M について $T(M) = N(M')$ と
なる NPDA M' を書け

演習問題解答例

問題 53 言語 $\{w \in \{a, b\}^+ \mid w \text{ を左から読んでも右から読んでも同じ} \}$ を受理する NPDA を図で書け. 受理する言語の定義は $T(M)$ の方を使うこと.



問題 54 問 53 で解答した NPDA が記号列 aba を受理する過程を時点表示で書け

$(q_a, aba, \perp) \vdash (q_a, ba, A\perp) \vdash (q_a, a, BA\perp) \vdash (q_b, a, A\perp) \vdash (q_b, \epsilon, \perp) \vdash (q_F, \epsilon, \epsilon)$

問題 55 問 53 で解答した NPDA が記号列 aa を受理する過程を時点表示で書け

$(q_a, aa, \perp) \vdash (q_a, a, A\perp) \vdash (q_b, \epsilon, \perp) \vdash (q_F, \epsilon, \epsilon)$

問題 56 問 53 で解答した NPDA が記号列 a を受理する過程を時点表示で書け

$(q_a, a, \perp) \vdash (q_a, \epsilon, A\perp) \vdash (q_b, \epsilon, \perp) \vdash (q_F, \epsilon, \epsilon)$

問題 57 問 53 で解答した NPDA が空列 ϵ を受理しないことを説明せよ

最初の状態 q_a から、何か記号を読まないとは移行できないから

問題 58 問 53 で解答した NPDA を記号で書け
解答略