プッシュダウンオートマトン

ある記号列 w が文脈自由言語に属するかどうか判定するための機械 (仕組み) が欲しい

決定性有限オートマトン (DFA) では，$L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ を受理できない．DFA を少し変更して L を受理できる仕組みを作りたい

L を受理するためには a が何個現れたか記憶する容量に制限がない記憶領域が必要

DFA にスタックと呼ばれる単純な記憶領域を付け加えると，記号列が文脈自由言語に属するかどうか判定する機械を作れる

スタック

とはデータ (記号) を一列に積み上げた山である

$$\begin{array}{|c|}\hline A \\ \hline B \\ \hline A \\ \hline \end{array}$$

スタックに行える操作は

- push – 新しいデータを山の一番上に積み上げる
- pop – 山の一番上のデータを取り除く

上記スタックに C を push した後のスタックは $\begin{array}{|c|}\hline C \\ \hline A \\ \hline B \\ \hline A \\ \hline \end{array}$

プッシュダウンオートマトン (NPDA)

ϵ 遷移を持つ非決定性有限状態オートマトンに１本のスタックを付加したもの
各状態で，入力とスタックの一番上を見て，状態遷移とスタックの操作を行う
NPDA は nondeterministic pushdown automaton の略

$L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ を受理する NPDA の例
q_a: それまでの入力がすべて a である状態
q_b: b が出て来た後の状態
q_F: 最終状態
スタックは最初に $\perp$ だけが入っている

q_a での動作: a を読んだらスタックに A を push して q_a に状態遷移,
b を読んだらスタックを pop して q_b に状態遷移

q_b での動作: スタックの一番上が A で入力が b なら, スタックを pop して q_b に遷移,
スタックの一番上が $\perp$ なら記号列を読まずにスタックを pop して q_F に遷移

NPDA の記号による表現

NPDA は 7 つ組 $M = (K, T, V, p, q_0, A_0, F)$ で表される．各要素の意味は以下の通り:

K: 状態の集合

T: 入力アルファベット (入力記号の集合)

V: スタックアルファベット (スタックに積む記号の集合)

p: 遷移関数．$K \times (T \cup \{\epsilon\}) \times V$ という集合から $K \times V^*$ の有限部分集合の集合への関数

q_0: 出発状態

A_0: 出発記号．スタックに最初に積んである記号．$\perp$ で表すことが多い

F: 最終状態の集合

p の意味：$p(q, a, A) \ni (q', A_1 A_2 \cdots A_n)$ は状態 q, スタックの一番上が A のときに記号 a を読んだ場合, スタックを pop した後 A_n, A_{n-1}, $\ldots$, A_1 の順番で記号を push し状態 q' に遷移することを表す． a が空列ならば同じ操作を記号を読まずに行う．上記の操作

でスタック $\begin{array}{|c|}\hline A \\ \hline \vdots \end{array}$ は $\begin{array}{|c|}\hline A_1 \\ \hline \vdots \\ \hline A_n \\ \hline \vdots \end{array}$ になる

記号による表現の例

$L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ を受理する NPDA の例

q_a: それまでの入力がすべて a である状態

q_b: b が出て来た後の状態

q_F: 最終状態

スタックは最初に $\perp$ だけが入っている．これを記号で表すと

$(\{q_a, q_b, q_F\}, \{a, b\}, \{A, \perp\}, p, q_a, \perp, \{q_F\})$

$p(q_a, a, \perp) = \{(q_a, A\perp)\}$

$p(q_a, a, A) = \{(q_a, AA)\}$

$p(q_a, b, A) = \{(q_b, \epsilon)\}$

$p(q_b, b, A) = \{(q_b, \epsilon)\}$

$p(q_b, b, \perp) = \{(q_F, \epsilon)\}$

それ以外の引数のときに p の値は空集合

NPDAの時点表示

PDAの時点表示(instantaneous description)とは3つ組 (q, w, γ) である．但し q はNPDAのその時点での状態を表し，w はNPDAがこれから読む記号列を表し，γ はその時点でのスタックを底の方を右にして書いた記号列である．

NPDAがどのような状態にあるかは時点表示で記述できる

NPDA M が，ある時点表示 (q, w, γ) から別の時点表示 (q', w', γ') に1回の遷移関数の適用で移れることを $(q, w, \gamma) \vdash_M (q', w', \gamma')$ と書く．同様に0回以上の遷移関数の適用で移れることを $(q, w, \gamma) \vdash_M^* (q', w', \gamma')$ で表す．M が何か書かなくてもわかる場合は省略する．

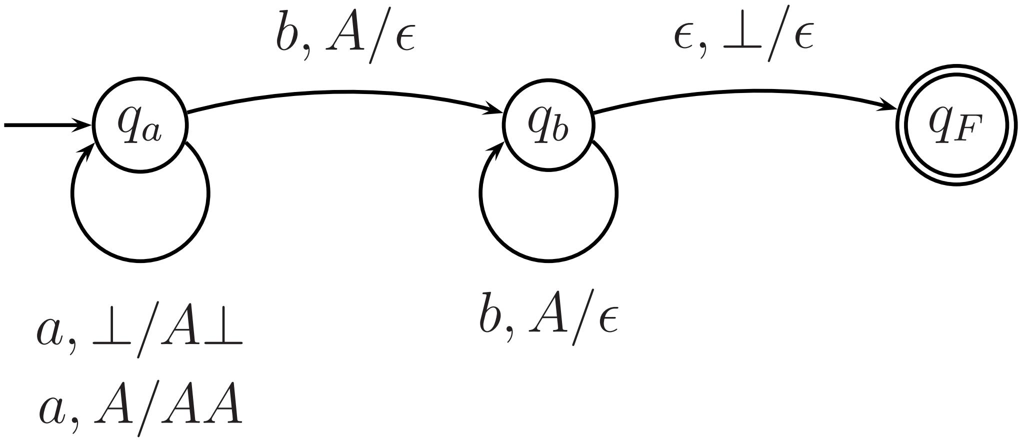
前のOHPで $aabb$ を受理するまでの過程は

$$
\begin{array}{rcl}
(q_a, aabb, \perp) & \vdash & (q_a, abb, A\perp) \\
& \vdash & (q_a, bb, AA\perp) \\
& \vdash & (q_b, b, A\perp) \\
& \vdash & (q_b, \epsilon, \perp) \\
& \vdash & (q_F, \epsilon, \epsilon)
\end{array}
$$

NPDA の図による表現

NFA は図で表すことができたが，NPDA も似たような図による表現がある.

NFA の図による表現は，矢印にその状態遷移を引き起こす入力記号または ϵ を添えて書いたが，NPDA では矢印に
「入力記号，スタックの一番上／スタックに push する記号列」
を添えて書く．今まで例に出た NPDA は



一つの矢印に２組以上の入力記号とスタック記号の組が対応する場合，縦に重ねて書く．図による NPDA の表現では，スタックに最初からある記号が何であるか示されないことに注意.

NPDA が受理する言語の二つの定義

$M = (K, T, V, p, q_0, \perp, F)$: NPDA

$T(M)$: M を最終状態のどれかに遷移させる記号列の集合
$T(M) = \{w \in T^* \mid (q_0, w, \perp) \vdash^* (q_F, \epsilon, \gamma), q_F \in F, \gamma \in V^*\}$

$N(M)$: 記号列 w を最後まで読んだときに M のスタックを空にする記号列 w の集合
$N(M) = \{w \in T^* \mid (q_0, w, \perp) \vdash^* (q, \epsilon, \epsilon), q \in K\}$

ある固定された M について $T(M) = N(M)$ とは限らない．しかし，M から $T(M) = N(M')$ および $N(M) = T(M'')$ となる M' と M'' を構成できる．従ってどちらの定義を用いて NPDA で受理できる言語の集合は同じである．この授業では M が受理する言語の定義として $T(M)$ を用いる

演習問題

問題 53 言語 $\{w \in \{a,b\}^+ \mid w$ を左から読んでも右から読んでも同じ $\}$ を受理する NPDA を図で書け．受理する言語の定義は $T(M)$ の方を使うこと．(注意：教科書 103 ページに書いてある NPDA の例とは受理する言語が少し違うから，103 ページの例を丸写しすると不正解)

問題 54 問 53 で解答した NPDA が記号列 aba を受理する過程を時点表示で書け

問題 55 問 53 で解答した NPDA が記号列 aa を受理する過程を時点表示で書け

問題 56 問 53 で解答した NPDA が記号列 a を受理する過程を時点表示で書け

問題 57 問 53 で解答した NPDA が空列 ϵ を受理しないことを説明せよ

問題 58 問 53 で解答した NPDA を記号で書け

問題 59 今日の授業でわかりにくい所や要望を書いて下さい

演習問題解答例

問題 51 の解答例は添付資料の例 7.21 を参照

演習問題 50 $L_{50} = \{a^m b^m c^i \mid m \geq 1, i \leq m\}$ が文脈自由言語ではないことを証明せよ。

ある n が存在して

1. $a^n b^n c^n = uvwxy,$
2. $|vx| \geq 1,$
3. $|vwx| \leq n,$
4. $uv^i wx^i y \in L$

とできたとして矛盾を導く。条件 3 より vx の中は a と b だけ含むか b と c だけ含む。 vx の中に a と b だけ含む 場合 uwy は a と b の数が c の数より少ないので L_{50} に含まれず矛盾。vx の中に b と c だけ含む 場合 uwy は a と b の数が異なるので L_{50} に含まれず矛盾。