

## 12/8 の中間テスト傾向

以下のような問題の中から主に出題します

- ある言語が正規言語でないことを証明させる問題
- 言語を与えて、それを生成する正規言語を書かせる問題
- 文法を与えて、そこから NFA を作る問題
- $\epsilon$ -NFA から NFA を作る問題
- NFA から DFA を作る問題
- DFA を最小化する問題
- DFA から正規文法を作る問題
- 正規表現が表す言語を受理するオートマトンを作る問題

## ポンプの補題

教科書に書いてあるポンプの補題は、以下のポンプの補題に比べて条件が一つ足りない。

ポンプの補題 (正規言語の反復補題)

$L$  を正規言語とし、 $L$  を受理する DFA  $M_L$  の状態数を  $n$  とする。また  $z \in L$  の長さが  $n$  以上であるとする。このとき、ある記号列  $w, x, y$  (但し  $|x| \geq 1$  かつ  $|wx| \leq n$ ) が存在して、 $z = wxy$  かつすべての  $i \geq 0$  に対して  $wx^iy \in L$  が成り立つ。

(注意： $w = \epsilon$  または  $y = \epsilon$  であっても構わない)

証明： $M_L$  の状態集合を  $\{q_1, \dots, q_n\}$  とし、出発状態を  $q_1$  とする。状態数が  $n$  で記号  $z$  の長さが  $n$  なので、 $M_L$  が  $z$  を受理するときに、2 回以上通過する状態が 1 つ以上ある。これらうち最初に 2 回通過する状態を  $q_k$  とする。

$$q_1 \xrightarrow{w} q_k \xrightarrow{x} q_k \xrightarrow{y} q_\ell$$

とする。但し  $q_\ell$  は  $z$  を  $M_L$  が受理したときの最終状態。また、状態数が  $n$  なので、2 回目に  $q_k$  に到達するまでに DFA が読み込む記号の数は  $n$  個以下である。したがって  $|wx| \leq n$

上の式から、 $wx^iy$  も受理されることがわかる。

## 文脈自由文法

句構造文法  $G = (N, T, P, S)$  の生成規則を以下の形に制限したもの

$$A \rightarrow \alpha, \quad (A \in N, \alpha \in (N \cup T)^*)$$

言語  $L$  を、 $L = L(G)$  となる文脈自由文法が存在するときに、文脈自由言語という。

「文脈自由」とは非終端記号の書き換えを、前後にある記号列とは関係なく行えることから来ている。つまり、非終端記号の書き換えを文脈とは自由に行える。

例：アルファベット  $\{a, b\}$  上で、左から読んでも右から読んでも同じ記号列の集合を生成する文脈自由文法

$$G = (N, T, P, S), S = \{S \rightarrow \epsilon \mid a \mid b \mid aSa \mid bSb\}$$

正規文法では、プログラミング言語を表すには非力すぎる。例えば正規文法では、数式の集合を生成できない。文脈自由文法を使えば、数式の集合を生成できる(第1回授業でやった)

## $\epsilon$ 生成規則の除去

$A \rightarrow \epsilon$  の形の生成規則 ( $\epsilon$  生成規則) があると扱いづらい。

文脈自由文法  $G = (N, T, P, S)$  から  $S \rightarrow \epsilon$  以外の  $\epsilon$  生成規則を除去する方法

1.  $A \rightarrow \epsilon$  の形の生成規則を  $P$  から除いたものを  $P'$  とする
2.  $A \xrightarrow[G]{+} \epsilon$  となる非終端記号 ( $\epsilon$  生成記号) をすべて求める
3. 各生成規則  $B \rightarrow \alpha$  について  $\alpha$  から  $\epsilon$  生成記号を 一つ以上 取り除いた規則をすべて  $P'$  に追加する。但し右辺が  $\epsilon$  になった場合は  $P'$  に追加しない

文法  $G' = (N, T, P', S)$  は  $L(G)$  から  $\epsilon$  を除いた言語を生成する。もし  $L(G)$  が  $\epsilon$  を含まなければ  $G'$  が求める文法である。もし  $L(G)$  が  $\epsilon$  を含む場合、

$$G'' = (N \cup \{S'\}, T, \{S' \rightarrow \epsilon | S\} \cup P', S')$$

が求める文法である

## 演習問題

問 43  $\{a^n b^{2n} \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$  を生成する文脈自由文法を  $(N, T, P, S)$  の形で書け

問 44 文法  $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ ,

$$P = \{S \rightarrow AB, \quad A \rightarrow SA|BB|bB, \quad B \rightarrow b|aA|\epsilon\}$$

と等価で、 $S \rightarrow \epsilon$  以外の  $\epsilon$  生成規則を持たない文法  $G'$  を  $(N, T, P, S)$  の形で書け

問 45 左から読んでも右から読んでも同じである記号列  $w \in \{a, b\}^*$  からなる言語を  $L_{45}$  とする。 $L_{45}$  が正規言語ではないことを証明せよ。

演習問題 46 今日の授業でわかりにくい所や要望を書いて下さい

## 演習問題解説

問 42  $L_{42} = \{a^n b^{2n} \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$  が正規言語ではないことを証明せよ

$L_{42}$  を受理する状態数  $N$  の DFA が有ったと仮定して矛盾を導く。 $3m \geq N$  として  $a^m b^{2m} = wxy$  ( $|x| \geq 1$ ) と分けて、 $i = 0, 1, \dots$  について  $wx^i y \in L_{42}$  が成り立ったとする。

$x$  が  $a$  だけからなる場合および  $b$  だけからなる場合：  
 $wy$  の中に含まれる  $b$  の数は  $a$  の 2 倍になっていないので矛盾

$x$  に  $a$  と  $b$  の両方が含まれる場合： $wx^2 y$  が  $a^n b^{2n}$  という形になっていないので矛盾

きちんと場合分けしないと減点