

今後の日程

11/21, 12/1, 12/3 授業

12/8 中間テスト

範囲は今日の授業まで。試験の傾向については来週予告する

12/15 休講 (出張のため)

12/22 補講 (10:40–12:10)

ある言語が正規言語ではないこと

ある言語が正規言語ではないことを証明させる問題が、オートマトンに関連する大学院入試問題によく出る。

ポンプの補題 (正規言語の反復補題)

L を正規言語とし、 L を受理する DFA M_L の状態数を n とする。また $z \in L$ の長さが n 以上であるとする。このとき、ある記号列 w, x, y (但し $|x| \geq 1$) が存在して、 $z = wxy$ かつすべての $i \geq 0$ に対して $wx^iy \in L$ が成り立つ。

(注意： $w = \epsilon$ または $y = \epsilon$ であっても構わない)

証明： M_L の状態集合を $\{q_1, \dots, q_n\}$ とし、出発状態を q_1 とする。状態数が n で記号 z の長さが n なので、 M_L が z を受理するときに、2 回以上通過する状態が 1 つ以上ある。これらの状態のうちの一つを q_k とする。

$$q_1 \xrightarrow{w} q_k \xrightarrow{x} q_k \xrightarrow{y} q_\ell$$

とする。但し q_ℓ は z を M_L が受理したときの最終状態。

上の式から、 wx^iy も受理されることがわかる。

ポンプの補題の使用例

$L = \{a^m b^m \mid m = 0, 1, 2, 3, \dots\}$ は正規言語ではない
ことの証明

L が正規言語とすると、ある n が存在して、 $a^m b^m = wxy$ (但し $n \leq 2m$) かつ $wx^2y = a^{m'} b^{m'}$ となる。

しかし w, x, y をどのように選んでも $wx^2y = a^{m'} b^{m'}$ は成立しない。したがって L は正規言語であるという最初の仮定が間違っていたことになる。

正規文法の空問題

ある正規文法 G が与えられた時に、 $L(G)$ が空集合かどうか判定する問題を「正規文法に対する空問題」と呼ぶ。

空問題は以下のようにして計算機で自動的に解くことができる。

1. $L(G)$ を受理する DFA M_G を作る。 M_G の状態数を n とする。
2. 長さ n 未満の記号列すべてについて M_G で受理されるか調べ、受理される記号列が無ければ $L(G) = \emptyset$

$L(G) \neq \emptyset$ ならば、 $L(G) \ni z$ が存在する。ポンプの補題より $|z| \geq n$ ならば $z = wxy$ と分けたとき wy も $L(G)$ に属し wy の長さは z より短くなる。 wy の長さが n 以上なら同じ議論でより短い $L(G)$ に属する記号列を見付けることができる。

したがって $L(G) \neq \emptyset$ なら長さ n 未満の $L(G)$ に属する記号列が存在する。したがって $L(G)$ が空集合かどうか調べるためには、長さ n 未満の記号列が $L(G)$ に属するかどうかしらみ潰しに調べればよい。

正規文法の有限問題

ある正規文法 G が与えられたときに、 $L(G)$ が有限集合かどうか判定する問題。以下の手順で判定できる。

1. $L(G)$ を受理する DFA M_G を作る。 M_G の状態数を n とする。
2. 長さ n 以上 $2n - 1$ 以下の記号列すべてについて M_G で受理されるか調べ、受理される記号列が無ければ $L(G)$ は有限集合。有れば $L(G)$ は無限集合。

「 $L(G)$ に長さ n 以上 $2n - 1$ 以下の記号列 z が存在する」 $\implies$ 「 $L(G)$ は無限集合」の証明：

$z = wxy$ として $wy, wxy, wx^2y, \dots$ が $L(G)$ に含まれるので、 $L(G)$ は無限集合

「 $L(G)$ に長さ n 以上 $2n - 1$ 以下の記号列 z が存在する」 $\Longleftarrow$ 「 $L(G)$ は無限集合」の証明：

次の OHP に続く

「 $L(G)$ に長さ n 以上 $2n - 1$ 以下の記号列 z が存在する」 $\Longleftarrow$ 「 $L(G)$ は無限集合」の証明：

$L(G)$ の要素 z で長さ n 以上の記号列を一つ選ぶ。ポンプの補題を適用して $z = wxy$ と分ける。このとき x の長さを n 以下になるように x を選べる。その理由は、もし x が長さ $n + 1$ 以上ならば x 自体にポンプの補題を適用して、 $x = w'x'y'$, $|x'| < |x|$ となる x' を選べるからである。

z から長さが 1 以上 n 以下短い wy を得られる。 z の長さが $2n$ 以上の場合、より短い $L(G)$ に属する記号列を見付ける手続きを繰り返して、長さ n 以上 $2n - 1$ 以下の $L(G)$ の記号列を見付けることができる。

正規文法と同値問題

二つの正規文法 G_1, G_2 が有ったときに、 $L(G_1) = L(G_2)$ かどうか判定する問題

1. G_1 を受理する最小 DFA M_1 , G_2 を受理する最小 DFA M_2 を作る
2. $M_1 = M_2$ かどうか調べる

演習問題

演習問題 39 左から読んでも右から読んでも同じである記号列 $w \in \{a, b\}^*$ からなる言語を L_{39} とする。 L_{39} が正規言語ではないことを証明せよ。

演習問題 40

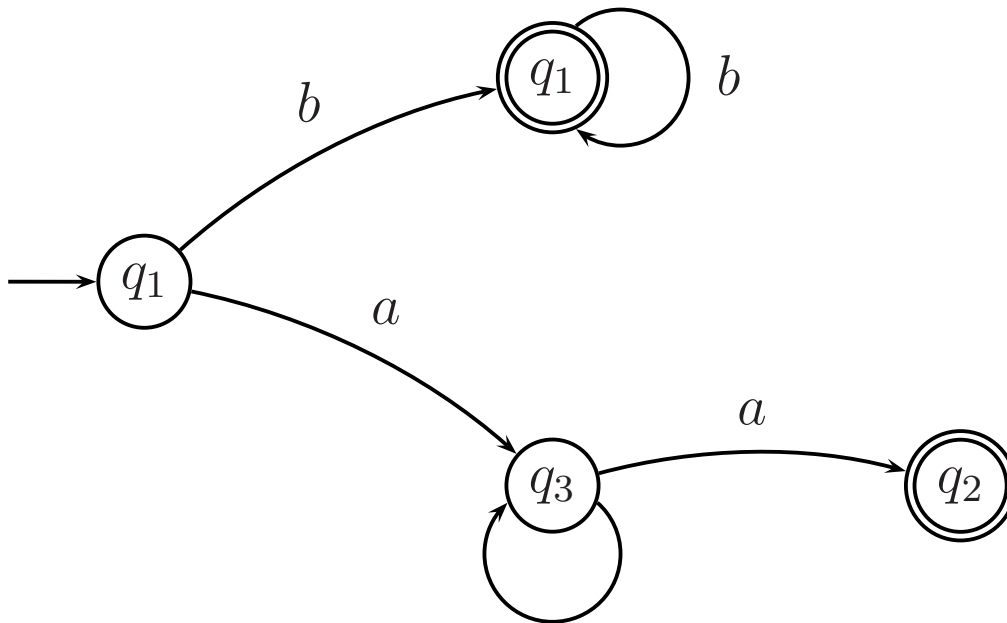
$$L_{40} = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

は正規言語ではないことを証明せよ。

演習問題 41 今日の授業でわかりにくい所や要望を書いて下さい

演習問題解説

問 36 状態数が最小であることを、区別できる状態の表を作って確認して下さい



問 37 与えられたオートマトンが受理する言語は

$$\{a, ab, ac, acc, accc, \dots\}$$

である。したがってこの言語を表す正規表現は

$$a + ab + acc^* = ab + ac^*$$

などである。(他にも正解はある)