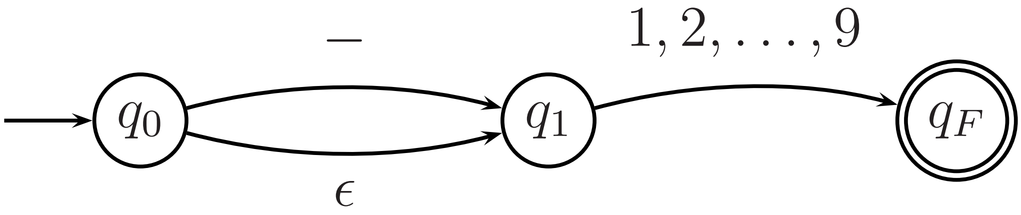
ϵ 遷移を含むオートマトン

NFA の状態遷移は、記号列から１つの記号を読み込んで行う

ϵ 遷移を含むオートマトンは記号を読み込まなくても、遷移が起きる状態の組が存在する。記号を読まなくても生じる状態遷移は矢印に ϵ を付けて表す
$-$ が 0 個か 1 個ありそのあと 1 から 9 が１文字続く文字列を受理するオートマトン



始点と終点が同じでラベルが異なる矢印をまとめる書き方もある。
左の矢印を１本にまとめて、 $\epsilon, -$ というラベルを書いてもよい

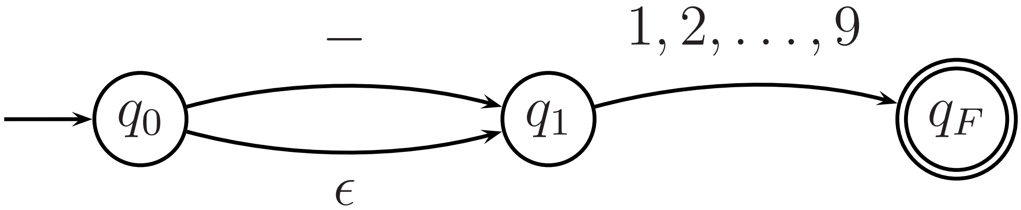
ϵ 遷移があるため、「$-$ が 0 個か 1 個ある」という性質をわかりやすくオートマトンで表すことができた

- ϵ 遷移を含む有限オートマトンを ϵ-NFA と呼ぶ
- ϵ 遷移を含む部分が非決定的なので、ϵ 遷移を含む決定性オートマトンは無い

ϵ-NFA の記号による書き方

ϵ-NFA は 5 つ組 (K, T, t, q_0, F) で表される。
遷移関数 t 以外は NFA と同じ。

遷移関数は $T \cup \{\epsilon\}$ から 2^K への写像



上記オートマトンは

$$(\{q_0, q_1, q_F\}, \{-, 1, 2, \ldots, 9\}, t, q_0, \{q_F\})$$

$t(q_0, \epsilon) = t(q_0, -) = \{q_1\}$
$t(q_1, 1) = t(q_1, 2) = \cdots = t(q_0, 9) = \{q_F\}$
それ以外の遷移関数の値は空集合

と書くことができる

受理できる言語のクラス

- ϵ-NFA で受理できる言語のクラスは、NFA で受理できる言語のクラスと同じ。(任意の ϵ-NFA を NFA に変換する方法を後で示す)
- 従って ϵ-NFA で受理できる言語の集合は正規言語の集合と同じである。

$$\Downarrow$$

$L_1,\ L_2$ をアルファベット Σ 上の正規言語としたときに

- 和集合 $L_1 \cup L_2$
- L_1 の補集合 (Σ^* の要素で L_1 に属さないもの)
- 共通集合 $L_1 \cup L_2$
- 連接 $L_1 L_2$
- クリーネ閉包 L_1^*

が正規言語であることを、ϵ-NFA を用いると簡単に証明できるので、便利である。証明を以下に示す。

和集合

L_1, L_2 は正規言語
M_1, M_2: $T(M_1) = L_1$, $T(M_2) = L_2$ となる NFA
$M_1 = (K_1, T_1, t_1, q_1, F_1)$, $M_2 = (K_2, T_2, t_2, q_2, F_2)$
必要なら記号を置き換えて $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ にする

$L_1 \cup L_2$ を受理する ϵ-NFA M は

$$M = (K_1 \cup K_2 \cup \{q_0\}, T_1 \cup T_2, t, q_0, F_1 \cup F_2)$$

新しい遷移関数 t は以下のように定める

- 出発状態 q_0 から M_1 の出発状態 q_1 と M_2 の出発状態 q_2 に ϵ 遷移するようにする。ただし q_0 は $K_1 \cup K_2$ に属さない

- それ以外の状態遷移は M_1 の状態遷移と M_2 の状態遷移に従う

厳密に書くと

$$t(q,a) = \begin{cases} t_1(q,a) & \text{if} \quad q \in K_1, a \in T_1, \\ t_2(q,a) & \text{if} \quad q \in K_2, a \in T_2, \\ \{q_1, q_2\} & \text{if} \quad q = q_0, a = \epsilon, \\ \emptyset & \qquad \text{上記以外} \end{cases}$$

補集合

L_1 は正規言語
M_1: $T(M_1) = L_1$ となる NFA
$M_1 = (K_1, T_1, t_1, q_1, F_1)$

状態 D を K_1 に属さない新しい状態とする。ある状態である記号を受け取ったときに次にどこの状態に行くか定義されいない部分の行き先をすべて D にする。また状態 D でどの記号を受け取っても再び状態 D に移るようにする。このような変更を行った NFA を

$$M_1' = (K_1', T_1, t_1', q_1, F_1)$$

とする。D は最終状態ではないから, $T(M_1) = T(M_1')$ である

L_1 の補集合を受理する NFA は「M_1' の最終状態ではない普通の状態」を最終状態とする NFA である。同じことを記号で書くと

$$(K_1', T_1, t_1', q_1, K_1' \setminus F_1)$$

但し $K_1 \setminus F_1$ は K_1 の要素で F_1 に属さないものからなる集合

共通集合 1

L_1, L_2 は正規言語
M_1, M_2: $T(M_1) = L_1$, $T(M_2) = L_2$ となる NFA
$M_1 = (K_1, T_1, t_1, q_1, F_1)$, $M_2 = (K_2, T_2, t_2, q_2, F_2)$

$L_1 \cap L_2$ は $\bar{L}_1 \cup \bar{L}_2$ の補集合に等しいので、前に述べた方法の組合せで $L_1 \cap L_2$ を受理するオートマトンを構成できる。(但し $\bar{L}_1$ は L_1 の補集合を表す)

共通集合 2 (直接構成法)

L_1, L_2 は正規言語

M_1, M_2: $T(M_1) = L_1$, $T(M_2) = L_2$ となる DFA

$M_1 = (K_1, T_1, t_1, q_1, F_1)$, $M_2 = (K_2, T_2, t_2, q_2, F_2)$

$L_1 \cap L_2$ を受理するオートマトンを作りたい

考え方： M_1 の状態と M_2 の状態の直積を状態にもつオートマトンを作る

$$M = (K_1 \times K_2, T_1 \cap T_2, t, (q_1, q_2), F_1 \times F_2)$$

新しい遷移関数を以下のように作る

$$t((q, r), a) = (t_1(q, a), t_2(r, a))$$

但し $q \in K_1$, $t \in K_2$, $a \in T_1 \cup T_2$ である。

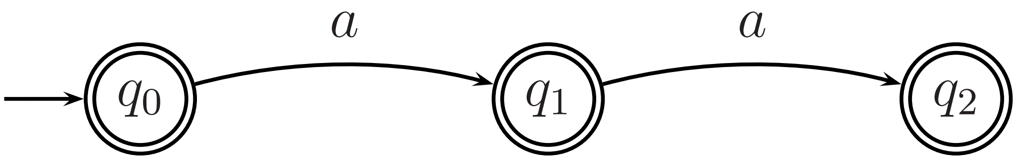
$t_1(q, a)$ または $t_2(r, a)$ のどちらかが未定義であるとき、$t((q, r), a)$ を未定義とする

$K_1 \times K_2$ の中で、出発状態 (q_1, q_2) から到達できない状態は削除してよい

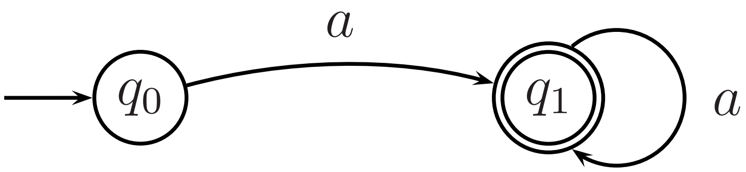
与えられたオートマトン M_1, M_2 が非決定性である場合も、同じ考え方で共通集合を受理するオートマトンを構成できる。

共通集合 2 (直接構成法) の例

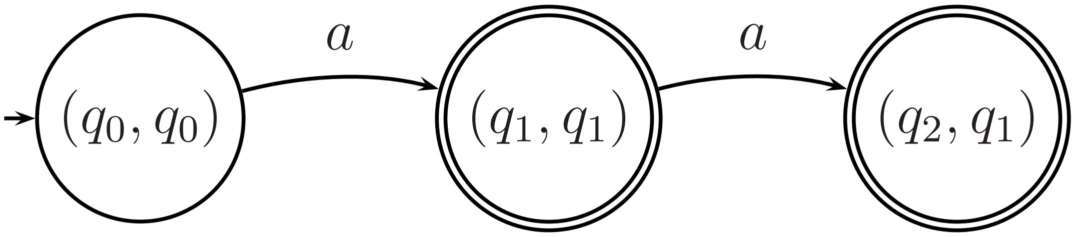
言語 $\{\epsilon, a, aa\}$ を受理する DFA



言語 $\{a\}^+$ を受理する DFA



1. 出発状態は (q_0, q_0)
2. (q_0, q_0) が記号 a を受け取ると (q_1, q_1) に遷移
3. (q_1, q_1) が記号 a を受け取ると (q_2, q_1) に遷移
4. 最初の DFA の遷移先が未定義なので、 (q_2, q_1) が記号 a を受け取った場合の遷移先は未定義



連接

L_1, L_2 は正規言語
M_1, M_2: $T(M_1) = L_1$, $T(M_2) = L_2$ となる DFA
$M_1 = (K_1, T_1, t_1, q_1, F_1)$, $M_2 = (K_2, T_2, t_2, q_2, F_2)$
L_1L_2 を受理するオートマトンを作りたい
必要なら記号を置き換えて $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ にしておく

考え方： M_1 の最終状態から M_2 の出発状態への ϵ 遷移を作ればよい

$$(K_1 \cup K_2, T_1 \cup T_2, t, q_1, F_2)$$

$q \in F_1$ について $t(q, \epsilon) = q_2$ とする。それ以外の遷移関数の値は t_1, t_2 の定義を引き継ぐ

連接を受理する ϵ-NFA の最終状態の集合は M_2 の最終状態の集合である

M_1, M_2 が NFA の場合も同じ考え方で連接を受理するオートマトンを構成できる

クリーネ閉包

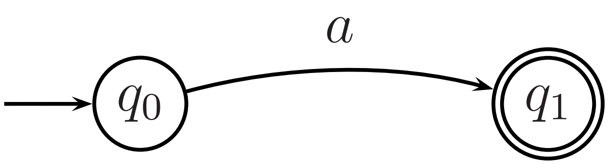
L_1 は正規言語
M_1: $T(M_1) = L_1$ となる NFA
$M_1 = (K_1, T_1, t_1, q_1, F_1)$

1. 新たな出発状態 q'_1 を作る
2. q'_1 から元の出発状態 q_1 への ϵ 遷移を作る
3. F_1 の状態から q'_1 への ϵ 遷移を作る
4. 最終状態の集合は $\{q'_1\}$ とする

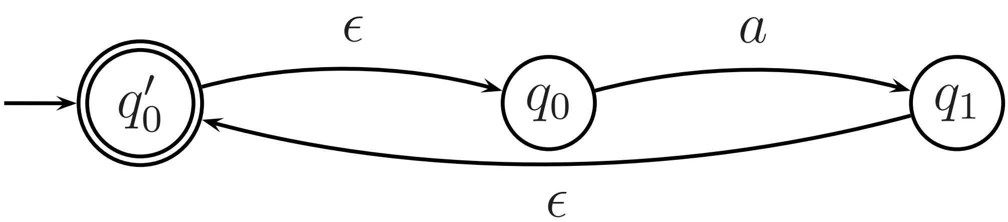
$$(K_1 \cup \{q'_1\}, T_1, t, q'_1, \{q'_1\})$$

クリーネ閉包の例

言語 $\{a\}$ を受理する DFA



説明した作り方で作った $\{a\}^*$ を受理するオートマトン



ϵ-NFA を NFA に変換する方法

ϵ-NFA

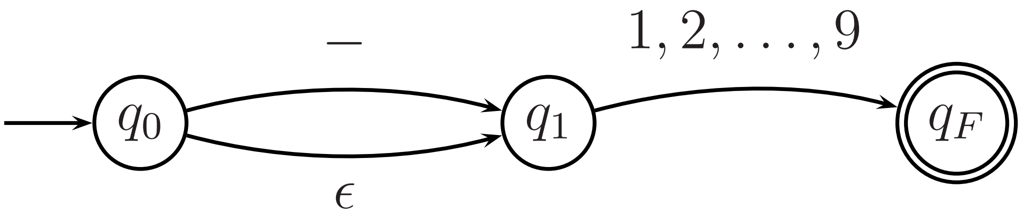
$$M_\epsilon = (K_\epsilon, T_\epsilon, t_\epsilon, q_\epsilon, F_\epsilon)$$

に対して、等価な NFA を

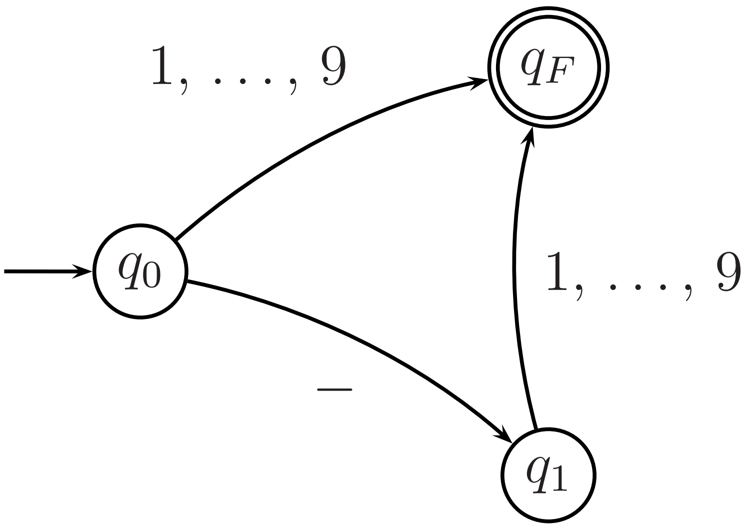
$$M_N = (K_\epsilon, T_\epsilon, t_N, q_\epsilon, F_N)$$

$q \in K_\epsilon$, $a \in T_\epsilon$ について $t_N(q, a)$ の値を「状態 q から 0 回以上有限回の ϵ 遷移をしたあと a で遷移してさらに 0 回以上有限回の ϵ 遷移をして到達できる状態の集合」と定義する。
最終状態の集合については、開始状態 q_ϵ から 1 回以上有限回の ϵ 遷移で F_ϵ のどれかの状態に到達できる場合 $F_N = F_\epsilon \cup \{q_\epsilon\}$ とし、そうでない場合は $F_\epsilon = F_N$ とする

ϵ-NFA を NFA に変換する例



を変換すると



1. q_0 から ϵ 遷移を 0 回以上した後 1 から 9 のどれかを受け取りその後 ϵ 遷移を 0 回以上した後に行ける状態は q_F だけである。
2. q_0 から ϵ 遷移を 0 回以上した後 $-$ を受け取りその後 ϵ 遷移を 0 回以上した後に行ける状態は q_1 だけである。

以下同様

元の ϵ-NFA の出発状態から 1 回以上の ϵ 遷移で到達できる最終状態は無いので、最終状態の集合は変わらない

演習問題

演習問題 25 言語 $L_{25} = \{aa, ab\}$ を受理する DFA または NFA をグラフと (K, T, t, q_0, F) の両方の形式で書け。

演習問題 26 言語 $L_{26} = \{bb, ab\}$ を受理する DFA または NFA をグラフと (K, T, t, q_0, F) の両方の形式で書け。

演習問題 27 和集合 $L_{25} \cup L_{26}$ を受理するオートマトンを説明した方法で構成し、グラフと (K, T, t, q_0, F) の両方の形式で書け。

演習問題 28 補集合 $\bar{L}_{25}$ を受理するオートマトンを説明した方法で構成し、グラフと (K, T, t, q_0, F) の両方の形式で書け。

演習問題 29 共通集合 $L_{25} \cap L_{26}$ を受理するオートマトンを説明した方法(直接構成法)で構成し、グラフと (K, T, t, q_0, F) の両方の形式で書け。

演習問題 30 連接 $L_{25}L_{26}$ を受理するオートマトンを説明した方法で構成し、グラフと (K, T, t, q_0, F) の両方の形式で書け。

演習問題 31 クリーネ閉包 L_{25}^* を受理するオートマトンを説明した方法で構成し、グラフと (K, T, t, q_0, F) の両方の形式で書け。

演習問題 32 問 31 で構成した ϵ-NFA を ϵ 遷移を含まない NFA に変換し、グラフと (K, T, t, q_0, F) の両方の形式で書け。

演習問題 33 今日の授業でわかりにくい所や要望を書いて下さい

演習問題でよくあった間違い

良く有った間違い:

- NFA の遷移関数 t の定義で $t(q, a) = \{A\}$ ではなく $t(q, a) = A$ と書いている人が半数近くいた
- NFA の遷移関数で、遷移先が無い状態と記号の組には遷移関数の値として空集合を割り当てることを明記して下さい。今回からそのことを明記しない解答は×にします

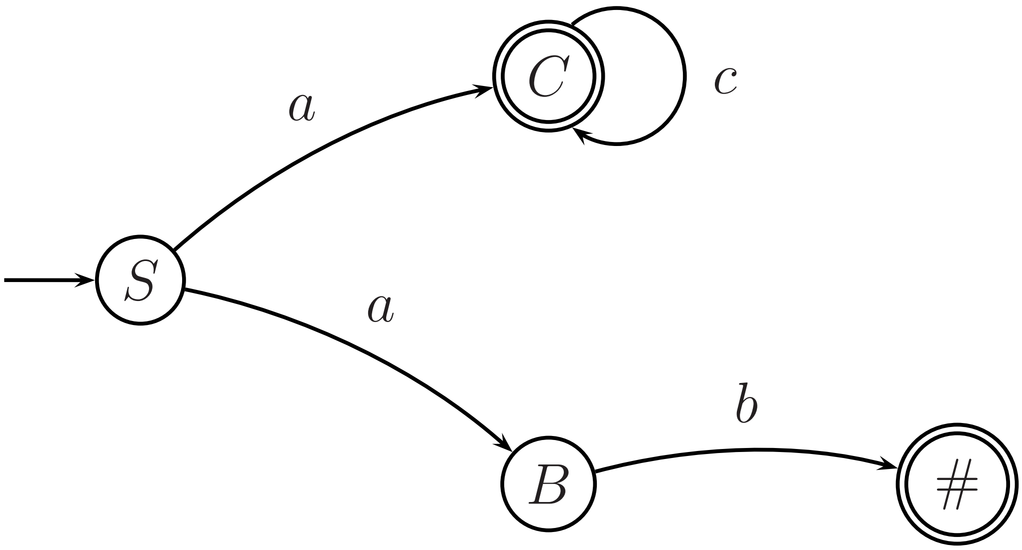
演習問題20 正規文法 $G_{20} = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$

$$\begin{aligned} P &= \{S \to aB|aC, \quad B \to b, \\ &\quad C \to \epsilon|cC\} \end{aligned}$$

が生成する言語を書け。記号で書けない場合日本語または英語で説明してもよい。

$L(G_{20}) = \{ab\} \cup (\{a\}\{c\}^*)$
または、$\{ab, a, ac, acc, accc, \ldots\}$
または、「 ab および a の後に c が 0 個以上有限個続く記号列からなる集合」など

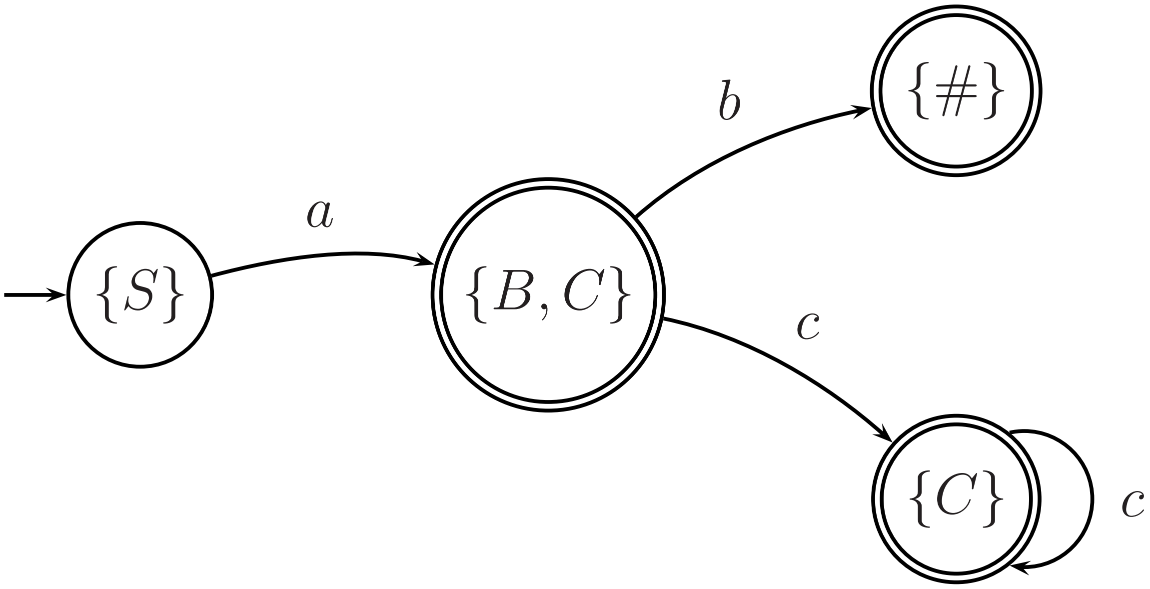
演習問題 21 G_{20} から前に説明した方法で NFA を作り、グラフと (K, T, t, q_0, F) の両方の形式で書け。



$(\{S, B, C, \#\}, \{a, b, c\}, t, S, \{C, \#\})$
遷移関数 t の定義は以下の通り

状態	記号	遷移先の状態の集合
S	a	$\{B, C\}$
B	b	$\{\#\}$
C	c	$\{C\}$
それ以外の組合せ		$\emptyset$

演習問題 22 問 21 で作った NFA を説明した方法で DFA に変換し、グラフと (K, T, t, q_0, F) の両方の形式で書け。



$(\{\{S\}, \{B, C\}, \{\#\}, \{C\}\}, \{a, b, c\}, t, \{S\},$
$\{\{B, C\}, \{\#\}, \{C\}\})$
遷移関数 t の定義は以下の通り

状態	記号	遷移先の状態
$\{S\}$	a	$\{B, C\}$
$\{B, C\}$	b	$\{\#\}$
$\{B, C\}$	c	$\{C\}$
$\{C\}$	c	$\{C\}$

演習問題23 問22で作ったDFAから説明した方法で正規文法を作れ

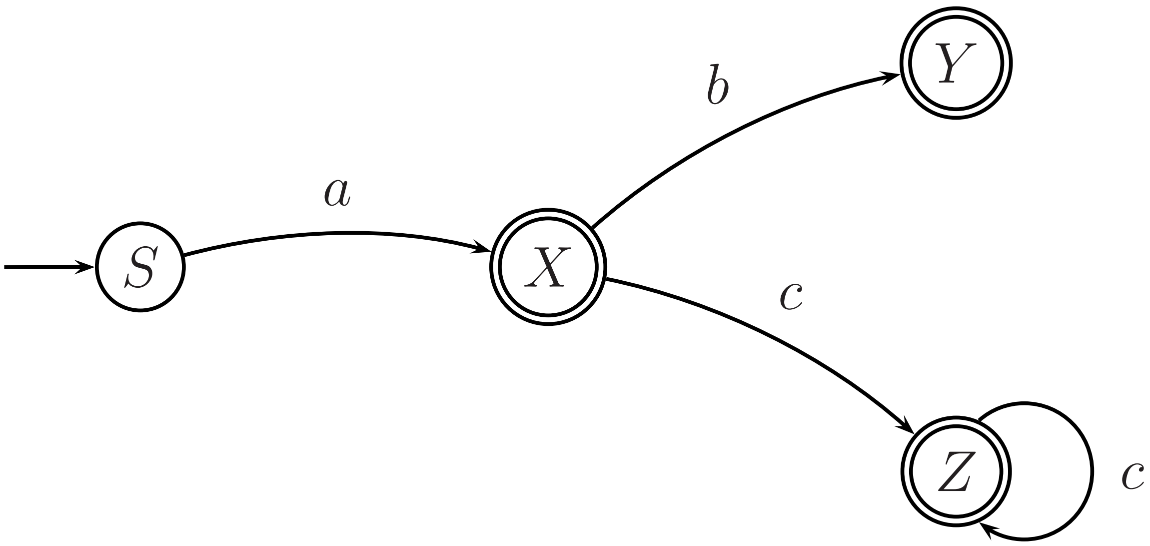
まず、記述が繁雑になるのを避けるために

$\{S\}$ を S に

$\{B, C\}$ を X に

$\{\#\}$ を Y に

$\{C\}$ を Z に置き換える (このような置き換えをしなくてもよい)



答えは

$(\{S, X, Y, Z\}, \{a, b, c\}, P, S)$

$$
\begin{aligned}
P &= \{X \to \epsilon, Y \to \epsilon, Z \to \epsilon, \\
&\quad S \to aX, X \to bY|cZ, Z \to cZ\} \\
&= \{S \to aX, X \to \epsilon|bY|cZ, Y \to \epsilon, Z \to \epsilon|cZ\}
\end{aligned}
$$