演習問題でよくあった間違い

以下のような答案は今回からすべて不正解にします

- 自分で言語を作る問題で、言語が何か書いていない。そのような答案は正しいのか間違っているのか判断できません。
- 言語を明示する問題は「文法 G で生成される言語」と書くのではなく、言語がどのような集合か明示して下さい
- 文法の定義で 4 つ組 (N, T, P, S) を書いていない。特に開始記号が何だか書いていないと、どのような言語が生成されるのかまったくわかりません。
- オートマトンの最終状態の集合を明示せず、F とだけ書いている人がいました
- 最終状態の集合が 1 つの状態からなるときに、集合の中括弧 $\{\}$ で括っていない
- 集合を表す中括弧 $\{\}$ と、組を表す丸括弧 $()$ をごっちゃにしている
- ルーズリーフまたは A4 以外の紙で提出している

演習問題解答

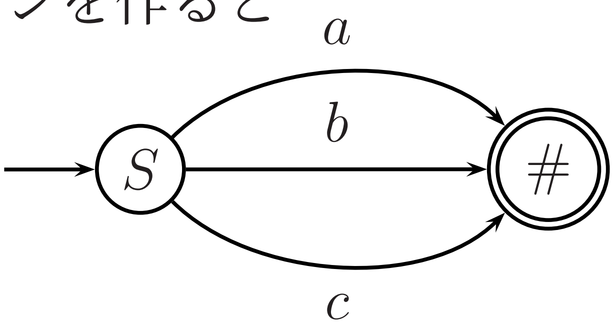
演習問題16 決定性オートマトンによって受理される言語 L_{16} を作り、L_{16} を生成する正規文法を書き、L_{16} を受理する決定性有限オートマトンをグラフおよび $M = (K, T, t, q_0, F)$ の両方の形式で書け。但し言語 L_{16} は今日の授業で例示した言語と本質的に同じ言語ではなく、要素数 3 以上の言語でなくてはならない。($L_{16} = \{a\}$ などは要素数 1 なので×)

解答例 1

$L_{16} = \{a, b, c\}$

正規文法: $(\{S\}, \{a, b, c\}, \{S \to a|b|c\})$

上の正規文法から授業で説明した方法でオートマトンを作ると



$M = (\{S, \#\}, \{a, b, c\}, t, S, \{\#\})$

$t(S, a) = t(S, b) = t(S, c) = \#$

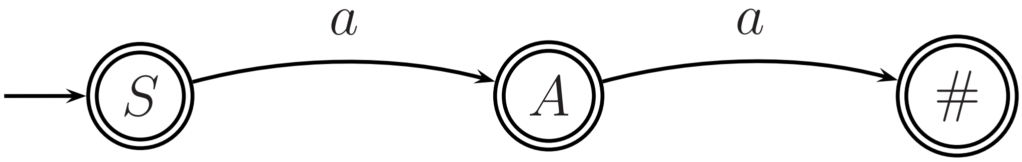
演習問題解答２

問題１６の解答例２

$L_{16} = \{\epsilon, a, aa\}$

正規文法: $(\{S\}, \{a\}, \{S \to \epsilon | a | aA, A \to a\})$

上の正規文法から授業で説明した方法でオートマトンを作ると



$M = (\{S, A, \#\}, \{a\}, t, S, \{S, A, \#\})$

$t(S, a) = A$, $t(A, a) = \#$

演習問題解答3

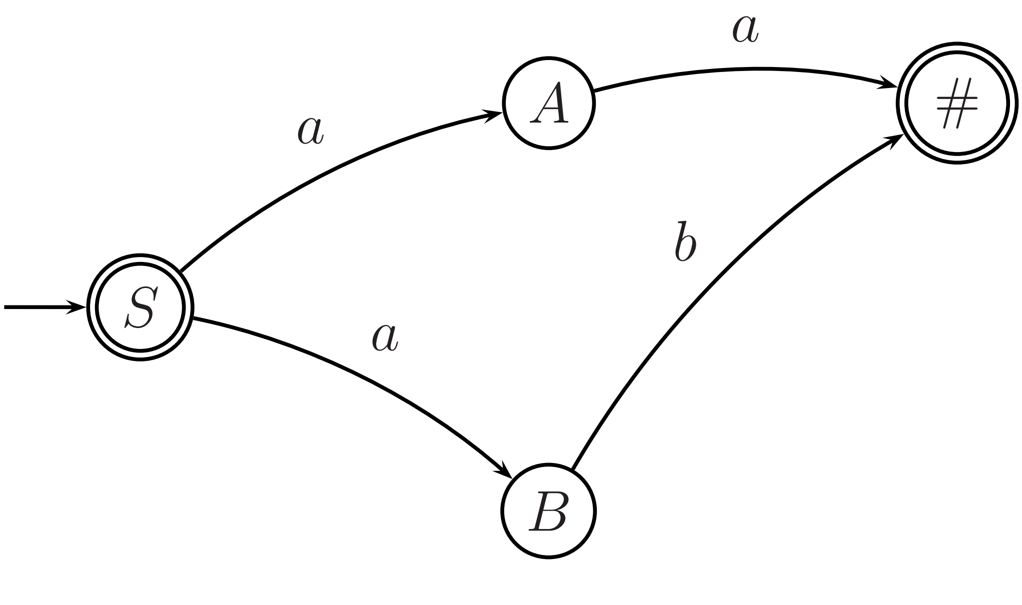
演習問題17 非決定性オートマトンによって受理される言語 L_{17} を作り、L_{17} を生成する正規文法を書き、L_{17} を受理する**決定性ではない非決定性**有限オートマトンをグラフおよび $M = (K, T, t, q_0, F)$ の両方の形式で書け。但し言語 L_{17} は今日の授業で例示した言語と本質的に同じ言語ではなく、要素数3以上の言語でなくてはならない。

解答例

$L_{17} = \{\epsilon, aa, ab\}$

正規言語: $(\{S, A, B\}, \{a, b\}, \{S \to \epsilon | aA | aB, A \to a, B \to b\}, S)$

上の正規言語から授業で説明した方法でオートマトンを作ると



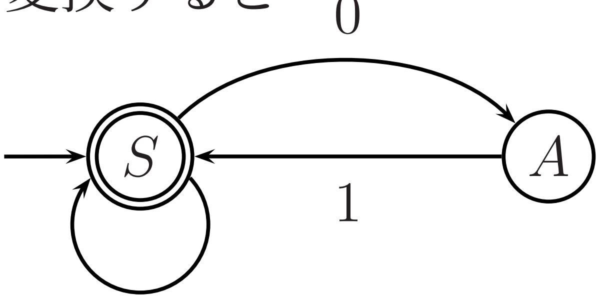
$M = (\{S, A, B, \#\}, \{a, b\}, t, S, \{S, \#\})$
$t(S, a) = \{A, B\}$, $t(A, a) = t(B, b) = \{\#\}$ それ以外の遷移関数 t の値は空集合

演習問題 18 問題 10 の言語を受理するオートマトンをグラフおよび $M = (K, T, t, q_0, F)$ の両方の形式で書け。

解答例の正規文法は
$G = (\{S, A\}, \{0, 1\}, P, S)$.

$$P = \{S \to \epsilon | 1S | 0A, \quad A \to 1S\}$$

である。これを授業で説明した方法でオートマトンに変換すると



$M = (\{S, A\}, \{0, 1\}, t, S, \{S\})$
$t(S, 0) = A$, $t(S, 1) = S$, $t(A, 1) = S$

正規文法とオートマトンの関係

L を任意に固定された言語とする

- 条件 P_G: L を生成する正規文法が存在する
- 条件 P_D: L を受理する決定性有限オートマトン (DFA) が存在する
- 条件 P_N: L を受理する非決定性有限オートマトン (NFA) が存在する

の関係はどうなっているのか？NFA で受理できるが DFA で受理できない場合などがありそうに思われる。

しかし、これら３つの条件は同値である。今回の授業は３つの条件が同値であることを証明する

- もし P_G ならば P_N
- もし P_N ならば P_D
- もし P_D ならば P_G

の３つの命題を証明すればよい

もし P_G ならば P_N

「もしある言語 L が正規文法 G によって生成されるなら、L を受理する NFA M が存在する」ことを示せば良い。

任意の G に対して $L(G) = T(M)$ となる NFA M_N の作り方が有ればよい

M_N の作り方は前回の授業でやった (証明終)

もし P_N ならば P_D

「もしある言語 L が NFA M_N によって受理されるなら、L を受理する DFA M_D が存在する」ことを示せば良い。

与えられた NFA $M_N = (K_N, T_N, t_N, S_N, F_n)$ から同じ言語を受理する DFA を作る

考え方：NFA では遷移関数の行き先状態が２つ以上あるので非決定性になっている。ここで行き先状態の集合を１つの状態だと思えば、決定性オートマトンである。

$$\Downarrow$$

NFA の状態の集合を状態とする DFA をつじつまが合うように作ればよい

NFAからDFAを作る方法

NFA $M_N = (K_N, T_N, t_N, S_N, F_N)$ から
DFA $M_D = (K_D, T_D, t_D, S_D, F_D)$ を作る
$T_D = T_N$ としてよい

DFAの状態はNFAの状態の集合にしたいから
$K_D = 2^{K_N}$ とする

DFAの遷移関数 t_D を t_N から作りたい
NFA の状態の集合 $X \subset K_N$, $a \in T_N = T_D$ が有ったとき $t_D(X, a)$ をどう決めればよいか？
X に含まれる状態から NFA の遷移関数で記号 a で移る状態の集合を $t_D(X, a)$ の値とすればつじつまがあう。同じ意味の記号で書くと

$$t_D(X, a) = \bigcup_{A \in X} t_N(A, a)$$

DFAの最終状態は、NFAの最終状態を含む状態集合にすればよい。このことを同じ意味の記号で書くと

$$F_D = \{X \in 2^{T_N} \mid X \cup F_N \neq \emptyset\}$$

DFAの出発状態 S_D は $\{S_N\}$ とすればよい

NFAからDFAを作る方法2

前OHPで説明した方法で一応DFAができるが、

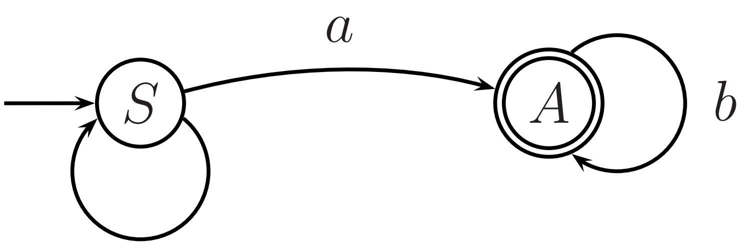
- 状態の数が指数的に大きくなる
- 各状態からすべての記号のラベルを持つ矢印が出て矢印が多くなる

ので手作業でDFAを作るときに辛い。

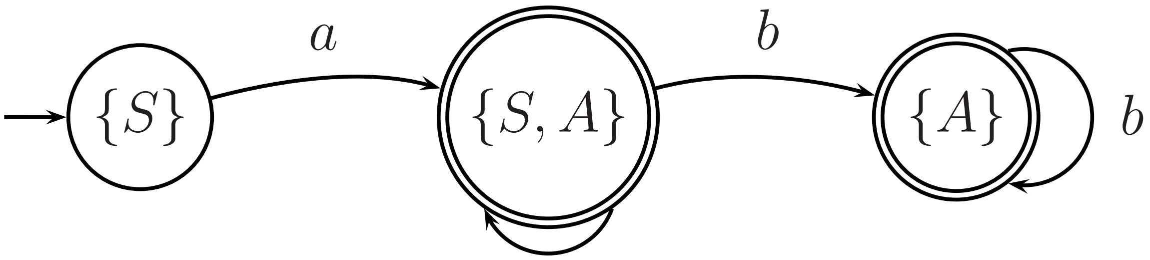
- 元のNFAである状態から矢印が出ていない記号は、新しいDFAで空集合 $\emptyset$ に遷移する。空集合からそれ以外の状態への遷移は無い。従って空集合の状態と空集合への遷移は無視してよい
- DFAの開始状態から到達できない状態は意味が無いので無視してよい

DFAの開始状態 $\{S_N\}$ から到達できる状態だけ、作れば良い

NFA を DFA に変換する例



$T_N = \{S, A\}$ なので
T_D を 2^{T_N} から空集合を除いた $\{\{S\}, \{A\}, \{S, A\}\}$ とする



出発状態 $\{S\}$ から a で行ける状態を考えると $\{S, A\}$ である
b で行ける状態は無いから、DFA に状態を付け加えない

状態 $\{S, A\}$ から a で行ける状態は、元の NFA の
S から a 行ける状態の集合 $\{S, A\}$ と
A から a 行ける状態の集合 $\emptyset$
の和集合 $\{S, A\}$ である

状態 $\{S, A\}$ から b で行ける状態は、元の NFA の
S から b 行ける状態の集合 $\emptyset$ と
A から b 行ける状態の集合 $\{A\}$
の和集合 $\{A\}$ である。以下同様

DFAを正規文法に変換する方法

DFA $M = (K, T_D, t, q_0, F)$ に対し
正規文法 $G = (N, T_G, P, S)$ を

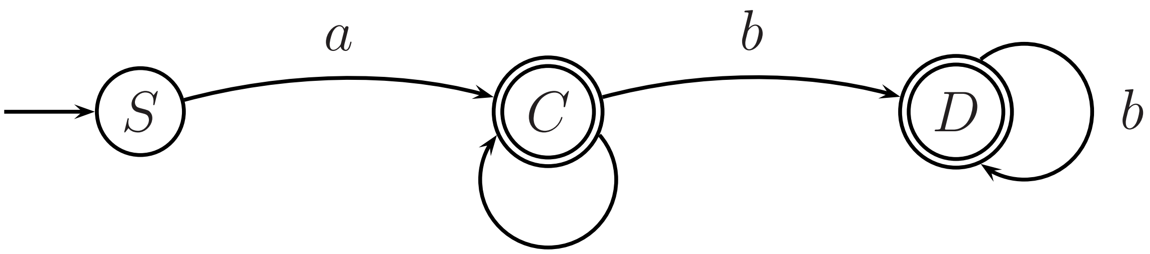
$T_G = T_N$
$N = T$
$S = q_0$
生成規則の集合は以下のように作る

1. DFA の最終状態 $A \in F$ に対応して $A \rightarrow \epsilon$ を追加

2. DFA に $t(A, a) = B$ という遷移が有れば $A \rightarrow aB$ を追加

DFA から正規文法に変換する例

さっきの OHP で作った DFA の記号を置き換えた DFA



対応する正規文法は
$G = (\{S, C, D\}, \{a, b\}, P, S)$

1. DFA の最終状態に対応して $C \to \epsilon$ と $D \to \epsilon$ を P に追加
2. 遷移に対応して $S \to aC$, $C \to aC$, $C \to bD$, $D \to bD$ を P に追加

従って $P = \{C \to \epsilon,\ D \to \epsilon,\ S \to aC,\ C \to aC,\ C \to bD,\ D \to bD\}$

演習問題

演習問題 20 正規文法 $G_{20} = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$

$$
\begin{aligned}
P &= \{S \to aB|aC, \quad B \to b, \\
&\quad C \to \epsilon|cC\}
\end{aligned}
$$

が生成する言語を書け。記号で書けない場合日本語または英語で説明してもよい。

演習問題 21 G_{20} から前に説明した方法で NFA を作り、グラフと (K, T, t, q_0, F) の両方の形式で書け。

演習問題 22 問 21 で作った NFA を説明した方法で DFA に変換し、グラフと (K, T, t, q_0, F) の両方の形式で書け。

演習問題 23 問 22 で作った DFA から説明した方法で正規文法を作れ

演習問題 24 今日の授業でわかりにくい所や要望を書いて下さい