

7.境界層内の流れ(P.71)

物体表面付近の流れ

- ・物体から流体への熱の移動
- ・流体から物体への物質の移動



物体近傍の速度勾配の大きい領域の流れが重要

粘性の影響大



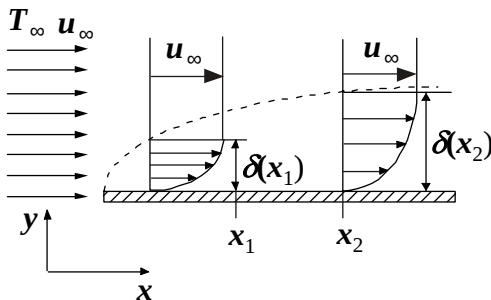
ポテンシャルは定義できない



別の方法が必要

境界層理論

平板に沿った流れ



平板付近の速度が変化している領域



境界層 : 破線の内側

- ・外側の流速は u_{∞}
 - ・下流に向って厚くなる
- 厚さ: $\delta(x_1)$ (x の関数)

平板上流れ: $Re \equiv \frac{\rho u_{\infty} x}{\mu}$ x : 平板先端からの距離

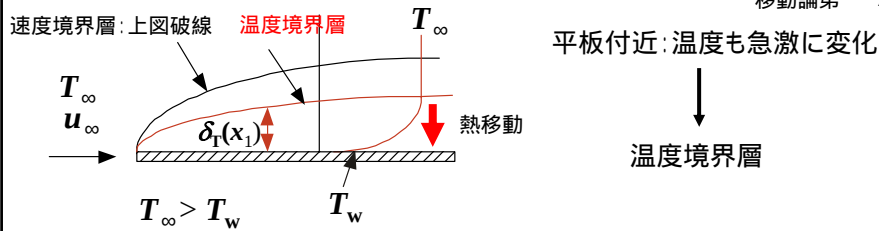
Re の小さい領域(上流側): 層流境界層

δ 増加

$Re = 5 \times 10^5 - 5 \times 10^6$: 乱流境界層



この間に遷移領域



境界層の熱移動の形式: 伝導, 対流 (資料1-17, 18参照)

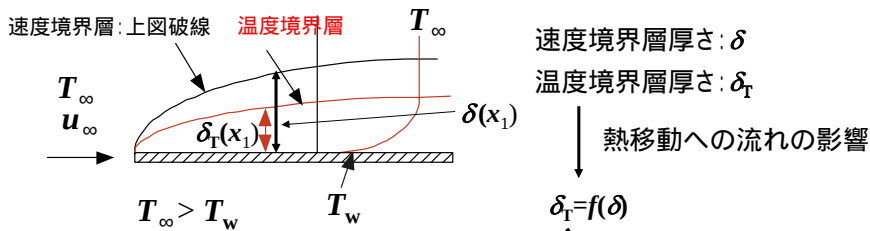
伝導 $\longleftrightarrow$ 粘性による運動量移動

$$\text{流束: } q = -k \frac{dT}{dy} = -\frac{k}{\rho C_p} \frac{d(\rho C_p T)}{dy} = -\alpha \frac{d(\rho C_p T)}{dy} \quad \alpha: \text{熱拡散率}$$

対流 $\longleftrightarrow$ 対流による運動量移動

$$\text{流束: } \rho C_p T u_y$$

流速を知る必要



$$\text{境界層内の伝導, 対流による熱移動流束} \propto \frac{T_\infty - T_w}{\delta_T}$$

$$q = -k \frac{dT}{dy} \quad \text{からの類推}$$

速度境界層の厚さにかかわる因子を明らかにすることが重要

境界層理論, 境界層方程式

物質移動についても同様

7・2境界層方程式(P.76)

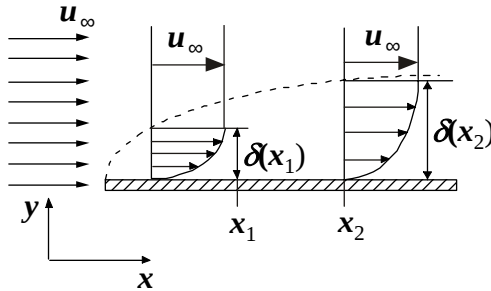
ナビエ-ストークスの運動方程式



境界層内流れの状況を考慮していくつかの項を省略 → 境界層理論



境界層内の速度分布・境界層厚さ



特徴(仮定)

- ・定常, 非圧縮
- ・二次元流れ(z 方向成分なし)
- ・下流に向うにしたがって厚くなる

 $u_x > u_y$ だが u_y も無視できない・ x 方向の変化 $<$ y 方向の変化

定常・非圧縮の二次元の連続の式, ナビエ-ストークスの運動方程式

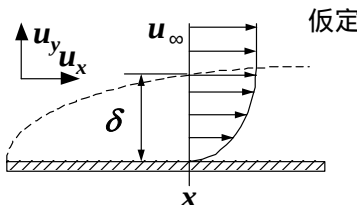
$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (a)$$

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \quad \text{ここでは} x \text{方向の式だけ考える}$$

↓ 圧力の変化は小さい: $\frac{\partial p}{\partial x} \approx 0$

$$\left(\nu = \frac{\mu}{\rho}; \text{動粘度} \right)$$

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \quad (b)$$

(a), (b)の2式の各項のオーダーを考える 以下 $O()$ はオーダーを表す

仮定

- 1) $O(x) \gg O(\delta)$ 境界層は薄い
- 2) $O(y) = O(\delta)$ y 方向の速度変化の領域は境界層上端まで
- 3) $O(u_x) = O(u_\infty)$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (a)$$

(以下ではオーダーだけ考えるので, 微分は割算と思ってよい)

$$3) O(u_x) = O(u_\infty) \longrightarrow \frac{\partial u_x}{\partial x} = O\left(\frac{u_\infty}{x}\right) \longrightarrow \frac{\partial u_y}{\partial y} = O\left(\frac{u_\infty}{x}\right)$$

左辺2項は同オーダー

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = O\left(\frac{u_\infty}{x}\right) \longrightarrow u_y = O\left(\frac{u_\infty}{x} y\right) \longrightarrow u_y = O\left(u_\infty \frac{\delta}{x}\right)$$

$$2) O(y) = O(\delta)$$

$$u_y = O\left(u_\infty \frac{\delta}{x}\right) \longrightarrow u_y \ll u_x = O(u_\infty)$$

$$1) O(x) \gg O(\delta) \longrightarrow O\left(\frac{\delta}{x}\right) \ll 1$$

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \quad (b)$$

左辺

$$\text{第一項: } u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} = O\left(\frac{u_\infty^2}{x}\right)$$

$$\text{第二項: } u_y = O\left(u_\infty \frac{\delta}{x}\right)$$

$$2) O(y) = O(\delta) \longrightarrow u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = O\left(u_\infty \frac{\delta}{x} \cdot \frac{u_\infty}{\delta}\right) = O\left(\frac{u_\infty^2}{x}\right)$$

$$3) O(u_x) = O(u_\infty)$$

右辺(動粘度はあとで考える)

$$\text{第一項: } \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = O\left(\frac{u_\infty}{x^2}\right)$$

$$\text{第二項: } \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = O\left(\frac{u_\infty}{\delta^2}\right)$$

$$1) O(x) \gg O(\delta)$$

$$O\left(\frac{u_\infty}{\delta^2}\right) \gg O\left(\frac{u_\infty}{x^2}\right)$$

$$\longrightarrow \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}$$

無視

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}$$

↓ 無視

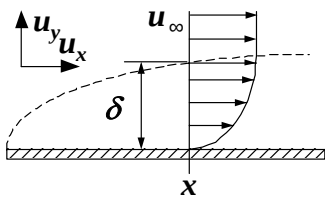
$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

↓ 左辺の2項 = $O\left(\frac{u_\infty^2}{x}\right)$ 右辺 = $\nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \nu O\left(\frac{u_\infty}{\delta^2}\right) = O\left(\nu \frac{u_\infty}{\delta^2}\right)$

$$O\left(\frac{u_\infty^2}{x}\right) = O\left(\nu \frac{u_\infty}{\delta^2}\right)$$

↓ $\frac{u_\infty^2}{x}$ と $\nu \frac{u_\infty}{\delta^2}$ は無関係に変化することはできない

$$\frac{u_\infty^2}{x} \propto \nu \frac{u_\infty}{\delta^2} \longrightarrow \frac{\delta}{x} \propto \sqrt{\frac{\nu}{xu_\infty}} = \text{Re}^{-\frac{1}{2}} \quad \text{境界層厚さとReの関係}$$



$$\frac{\delta}{x} = k \sqrt{\frac{\nu}{xu_\infty}} \longrightarrow \delta = k \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}$$

- ・下流ほど厚い: x の平方根に比例
- ・粘度が大きいほど厚い
- ・速度 u_∞ が大きいほど薄い

本来は

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right)$$

$$u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right)$$

連続の式, 運動方程式

境界層理論による仮定

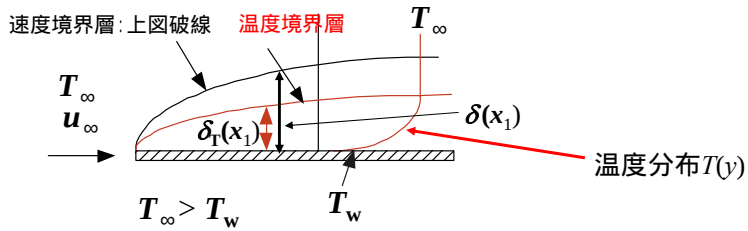
流れ関数の導入

ポテンシャルは定義できないが流れ関数はOK

ブラジウスの解 $\longrightarrow \frac{\delta}{x} = 5.0 \text{Re}^{-\frac{1}{2}}$

(層流境界層)

速度境界層厚さを熱移動に応用するには？



熱移動の方程式 $u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \rightarrow \begin{matrix} \text{温度分布 } T(y) \\ \text{温度境界層厚さ } \delta_T \end{matrix}$

類似

境界層内の熱移動流束 $\propto \frac{T_\infty - T_w}{\delta_T}$

運動(量)方程式 $u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right)$

熱移動の方程式 $u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$

熱移動

対流: $\rho C_p T u$

伝導: $-\alpha \frac{d(\rho C_p T)}{dy}$

運動量移動

対流: ρu^2

粘性: $-\mu \frac{du}{dy} = -\nu \frac{d(\rho u)}{dy}$

運動(量)方程式

$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right)$

似た形の方程式となる

熱 $u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$

運動量 $u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right)$

$\text{Pr} \equiv \frac{\nu}{\alpha} = 1 \rightarrow \nu = \alpha \longrightarrow \text{速度と温度の分布が一致} \longrightarrow \delta_T = \delta$

プラントル数

このことから類推

温度境界層厚さ: $\delta_T = f(\text{Pr}, \delta)$

$$\frac{\delta}{x} = 5.0 \text{Re}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\delta_T = g(\text{Pr}, \text{Re})$$

熱流束

$$\frac{\delta_T}{x} \propto \text{Re}^{-\frac{1}{2}} \text{Pr}^{-\frac{1}{3}} = \text{Re}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\alpha}{\nu} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\delta_T}{x} \propto \text{Re}^{-\frac{1}{2}} \text{Pr}^{-\frac{1}{3}} \quad \frac{\delta}{x} = 5.0 \text{Re}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\delta_T}{\delta} \propto \text{Pr}^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{\alpha}{\nu} \right)^{\frac{1}{3}}$$

移動論第一 7-14

$$\frac{\delta_T}{x} \propto \text{Re}^{-\frac{1}{2}} \text{Pr}^{-\frac{1}{3}} \rightarrow \delta_T \propto \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \text{Pr}^{-\frac{1}{3}}$$

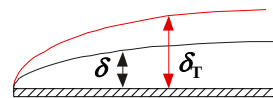
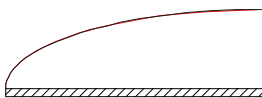
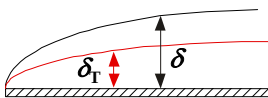
- ・下流ほど厚い
- ・速いほど薄い

$$\text{熱流束} \propto \frac{T_\infty - T_w}{\delta_T} \longleftarrow \text{速いほど大きい}$$

$$\alpha < \nu \rightarrow \delta_T < \delta$$

$$\alpha = \nu \rightarrow \delta_T = \delta$$

$$\alpha > \nu \rightarrow \delta_T > \delta$$



物質移動ではPrの代りに $\text{Sc} \equiv \frac{\nu}{D}$: シュミット数を使う

D: 拡散係数

熱・物質移動の詳細 → 移動論第二