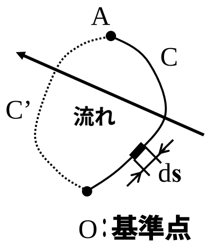
A4･2流れ関数



二次元(平面上)の流れ

OA間の流量 ＝ 曲線OCA(実線)を横切る流量

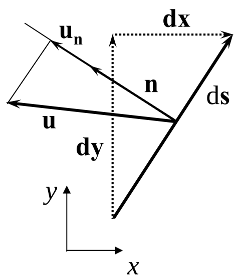
＝ 曲線OC’A(破線)を横切る流量

↓

OA2点を通る任意の曲線を横切る流量を計算すればよい

OCA上の微小区間dsを横切る流量:$d\psi$

ギリシャ文字プサイ



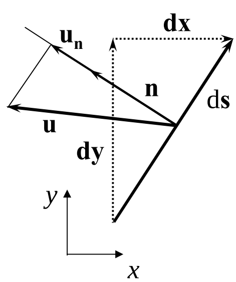
$\mathbf{u}$:流体の速度ベクトル

$\mathbf{n}$:dsに垂直な外向きの単位ベクトル

$\mathbf{u}_\mathrm{n}$:$\mathbf{u}$のベクトル$\mathbf{n}$の方向への正射影

↓

$$d\psi = |\mathbf{u}_\mathrm{n}| \cdot |\mathbf{ds}|$$



$d\psi = |\mathbf{u}_\mathrm{n}| \cdot |\mathbf{ds}|$ を求める

$\mathbf{ds} = (dx, dy)$　　　　$\left(|\mathbf{dx}| = dx, |\mathbf{dy}| = dy\right)$

↓　$\mathbf{n} \perp \mathbf{ds},\ \ |\mathbf{n}| = 1$ (単位ベクトル)

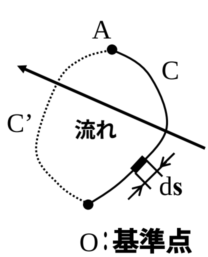
$$\mathbf{n} = \left(-\frac{dy}{|\mathbf{ds}|}, \frac{dx}{|\mathbf{ds}|}\right)$$

↓

$$|\mathbf{u}_\mathrm{n}| = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = (u_x, u_y) \cdot \left(-\frac{dy}{|\mathbf{ds}|}, \frac{dx}{|\mathbf{ds}|}\right) = -u_x \frac{dy}{|\mathbf{ds}|} + u_y \frac{dx}{|\mathbf{ds}|}$$

↓

$$d\psi = |\mathbf{u}_\mathrm{n}| \cdot |\mathbf{ds}| = \left(-u_x \frac{dy}{|\mathbf{ds}|} + u_y \frac{dx}{|\mathbf{ds}|}\right)|\mathbf{ds}| = -u_x dy + u_y dx$$



2点OA間の流量：Q

$$Q = \int_\mathrm{O}^\mathrm{A} d\psi = \int_\mathrm{O}^\mathrm{A} (-u_x dy + u_y dx)$$

$$Q=\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} d\psi=\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}}(-u_x dy+u_y dx)$$

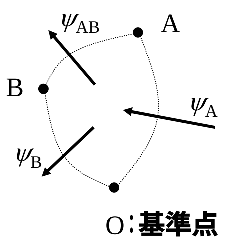
↓ $\psi=\int d\psi$

$$Q=\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} d\psi=\psi_{\mathrm{A}}-\psi_{\mathrm{O}}$$ Oは基準点，$\psi_{\mathrm{O}}=0$

$Q=\psi_{\mathrm{A}}\rightarrow\psi(x,y)$ ：**流れの中の任意の位置と基準点との間の流量**

流れ関数 $d\psi=-u_x dy+u_y dx$ **を満たす関数**

※テキストにより流れ関数の符号の定義が異なる場合あり



AO**間の流量**：ψ_{A}

BO**間の流量**：ψ_{B}

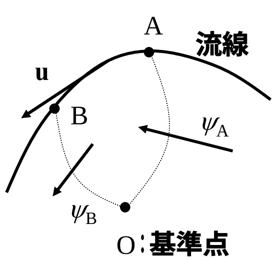
AB**間の流量**：$\psi_{\mathrm{AB}}=\psi_{\mathrm{A}}-\psi_{\mathrm{B}}$

流線：x-y**平面上の関数** $y=f(x)$:**流線の方程式**

↓ **接線と速度ベクトルの方向が一致**

$$\frac{dy}{dx}=\frac{u_y}{u_x}\rightarrow\frac{dx}{u_x}=\frac{dy}{u_y}\rightarrow -u_x dy+u_y dx=d\psi=0$$

$d\psi=0$ ⟶ **流線上では流れ関数**ψ**は一定**



A,B**が流線上にある場合**

流線:速度ベクトルの方向＝接線の方向

↓ **流線を横切る流れはない**

AB**間の流量**：$\psi_{\mathrm{AB}}=\psi_{\mathrm{A}}-\psi_{\mathrm{B}}=0$ ⟶ $\psi_{\mathrm{A}}=\psi_{\mathrm{B}}$

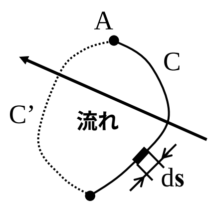
↓ **任意の2点で成立つ**

流線上でψ**は一定**

流線間の流量は？

流線Aの流れ関数：ψ_1, **流線Bの流れ関数**：ψ_2

流量= $\psi_2 - \psi_1$



O：**基準点**

※流れ関数が定義できる条件

OCA**と**OC'A**の流量が一致すること** $\longrightarrow$

- **二次元**
- **定常**
- **非圧縮性**

流れ関数の利用

$$d\psi = -u_x dy + u_y dx = u_y dx - u_x dy$$

$\downarrow$ $d\psi$**は全微分**

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = u_y dx - u_x dy$$

$\downarrow$ dx, dy**の項を比較**

$$u_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$ $\longleftarrow$ ψ**が明らかになれば**u_x, u_y**が求められる**

二次元,定常,非圧縮の場合の運動方程式を解く場合に利用

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right)$$

$$u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right)$$

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right) \qquad (1)$$

$$u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\right) \qquad (2)$$

(1)をy, (2)をxで微分

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u_y \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = -\underline{\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}} + \nu\left(\frac{\partial^3 u_x}{\partial x^2 \partial y}+\frac{\partial^3 u_x}{\partial y^3}\right) \qquad (1)'$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u_x \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(u_y \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) = -\underline{\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}} + \nu\left(\frac{\partial^3 u_y}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u_y}{\partial x \partial y^2}\right) \qquad (2)'$$

圧力項が等しい　⟶　圧力を消去できる

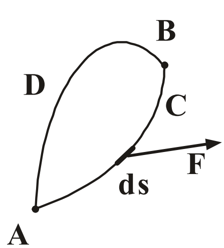
$u_x = -\dfrac{\partial \psi}{\partial y}$,　$u_y = \dfrac{\partial \psi}{\partial x}$　を代入⟶　ψのみの方程式

ψのみの方程式を解く ⟶ $u_x = -\dfrac{\partial \psi}{\partial y}$,　$u_y = \dfrac{\partial \psi}{\partial x}$　により速度が計算される

利用例：球の周りの遅い流れ　・遅いので方程式の左辺(対流項)を無視
・球面座標系の方程式にして解く

A4・3流れ関数と速度ポテンシャルー複素速度ポテンシャルの利用

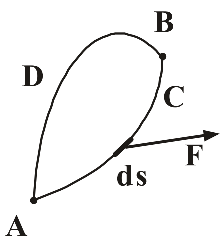
ポテンシャルとは？　　質点にかかる力と仕事の関係を考える
(流体力学を離れて)



力F： ⟶ 仕事 $= \int_{ACB} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$　AからCを通りBへ

摩擦力の場合：$\int_{ACB} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} \neq \int_{ADB} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$

重力の場合：　$\int_{ACB} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \int_{ADB} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$



摩擦力の場合

$$\int_{ACB}\mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} \neq \int_{ADB}\mathbf{F}\cdot\mathbf{ds}$$

$$\downarrow$$

$$\int_{ACBDA}\mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} = \int_{ACB}\mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} - \int_{ADB}\mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} \neq 0$$

重力の場合

$$\int_{ACB}\mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} = \int_{ADB}\mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} \rightarrow \underbrace{\int_{ACBDA}\mathbf{F}\cdot\mathbf{ds}}_{\oint \mathbf{F}\cdot\mathbf{ds}} = \int_{ACB}\mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} - \int_{ADB}\mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} = 0 \rightarrow \boxed{\text{ポテンシャルを持つ}}$$

ベクトル場で一般的に成立つ

ポテンシャル：基準点を決めると任意の位置の量が決まる

例：重力場での重力の仕事(任意の位置から基準点まで移動させる仕事)

基準点: O(x,y,z_0)　　仕事：$U = mgz - mgz_0 \equiv$ ポテンシャル

力：$F = -mg = -\dfrac{dU}{dz}$　　ポテンシャルの勾配

流体力学に戻る

速度：ベクトル ← 重力と同じベクトル場，ポテンシャルを定義できないか

重力場

ポテンシャルU:仕事

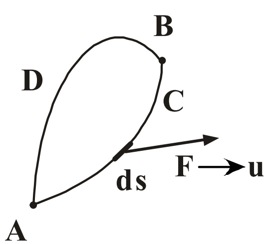
ポテンシャルの勾配 $-\dfrac{dU}{dz}$:重力$\mathbf{F}$

速度場

ポテンシャルϕ

ポテンシャルの勾配 $-\dfrac{d\phi}{dx}$:速度$\mathbf{u}$

このようなϕがあれば便利



重力の場合の条件

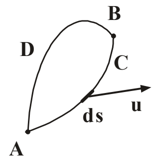
$$\int_{ACB}\mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} = \int_{ADB}\mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} \rightarrow$$

$$\int_{ACBDA}\mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} = \int_{ACB}\mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} - \int_{ADB}\mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} = 0$$

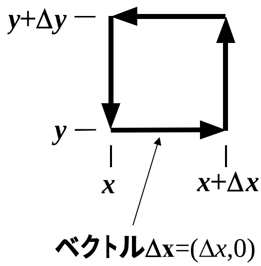
速度の場合も同じ

$$\int_{ACB}\mathbf{u}\cdot\mathbf{ds} = \int_{ADB}\mathbf{u}\cdot\mathbf{ds} \rightarrow$$

$$\int_{ACBDA}\mathbf{u}\cdot\mathbf{ds} = \int_{ACB}\mathbf{u}\cdot\mathbf{ds} - \int_{ADB}\mathbf{u}\cdot\mathbf{ds} = 0$$



$$\int_{ACB}\mathbf{u}\cdot d\mathbf{s} = \int_{ADB}\mathbf{u}\cdot d\mathbf{s} \rightarrow \underbrace{\int_{ACBDA}\mathbf{u}\cdot d\mathbf{s}}_{\oint \mathbf{u}\cdot d\mathbf{s}} = \int_{ACB}\mathbf{u}\cdot d\mathbf{s} - \int_{ADB}\mathbf{u}\cdot d\mathbf{s} = 0$$



$\oint \mathbf{u}\cdot d\mathbf{s}$　を小さい閉曲線(左の正方形)で考える

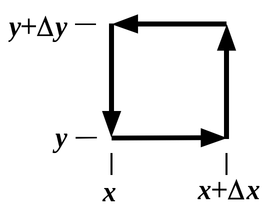
xと$x+\Delta x$の間で速度uがほぼ変化しないものとすると

$$\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)}\mathbf{u}\cdot d\mathbf{s} = \mathbf{u}\big|_y \cdot \Delta\mathbf{x} = (u_x\big|_y, u_y\big|_y)\cdot(\Delta x,0) = u_x\big|_y \Delta x$$

↓ 他の3辺も同様に

$$\oint \mathbf{u}\cdot d\mathbf{s} = u_x\big|_y \Delta x + u_y\big|_{x+\Delta x}\Delta y - u_x\big|_{y+\Delta y}\Delta x - u_y\big|_x \Delta y$$
$$= u_y\big|_{x+\Delta x}\Delta y - u_y\big|_x \Delta y + u_x\big|_y \Delta x - u_x\big|_{y+\Delta y}\Delta x$$

↓ $\Delta x\Delta y$で除する



$$\oint \mathbf{u}\cdot d\mathbf{s} = \frac{u_y\big|_{x+\Delta x} - u_y\big|_x}{\Delta x} - \frac{u_x\big|_{y+\Delta y} - u_x\big|_y}{\Delta y}$$
$$= \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

↓ $\oint \mathbf{u}\cdot d\mathbf{s} = 0$　が条件

$$\oint \mathbf{u}\cdot d\mathbf{s} = \underline{\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0}$$

これが成立てば速度ポテンシャルを定義できる

ベクトル(三次元)でこの条件を表すと

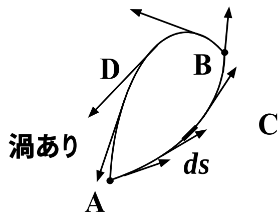
$\nabla\times\mathbf{u} = \mathrm{rot}\,\mathbf{u} = 0$　　$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$:ナブラ(ベクトル演算子)

外積　　(**i**, **j**, **k**:x,y,z方向の基本ベクトル)

rot:ベクトルの回転

この条件:渦なし流れ

渦なし流れとは？

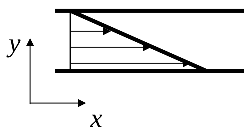


$$\int_{ACB}\mathbf{u}\cdot d\mathbf{s} > 0,\ \int_{BDA}\mathbf{u}\cdot d\mathbf{s} > 0$$

$$\downarrow$$

$$\oint \mathbf{u}\cdot d\mathbf{s} = \int_{ACBDA}\mathbf{u}\cdot d\mathbf{s} = \int_{ACB}\mathbf{u}\cdot d\mathbf{s} + \int_{BDA}\mathbf{u}\cdot d\mathbf{s} > 0$$

ポテンシャルは定義できない



平板間の流れ

$$\underline{\frac{\partial u_y}{\partial x}} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{\partial u_x}{\partial y} \neq 0$$ **見たところ渦がなくてもだめ**

0

$$\downarrow$$

このことから考えて

<u>固体表面付近はだめ</u>

- **粘性の影響が大きい**
- **速度勾配が大きい**

渦なし流れ：粘性の無視できる流れ
粘性のない流体，理想流体の流れ

例：理想流体の円柱周りの流れ

- **円柱表面で**$\mathbf{u}=0$**とならない(現実離れ？)**
- **円柱表面付近の粘性の影響のある領域以外は実際の流れに近い**

速度ポテンシャル： $-\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} - \dfrac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} = \mathbf{u}$ **となる関数**$\phi(x,y)$

- **流れ関数と違い，三次元でも定義できる**
- **ベクトルで表すと**

$$-\nabla\phi = -\mathrm{grad}\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{j} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k} = \mathbf{u}$$

重力とポテンシャルの関係と同じ $-\dfrac{dU}{dz} = F$

速度ポテンシャルと速度の関係

$$-\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i}-\frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}=u_x\mathbf{i}+u_y\mathbf{j}$$

↓

$$u_x=-\frac{\partial\phi}{\partial x},\quad u_y=-\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

↓ **流れ関数と比較**　$u_x=-\dfrac{\partial\psi}{\partial y},\quad u_y=\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{\partial\phi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$ ← **コーシーリーマン**(Cauchy-Riemann)**の関係**

複素速度ポテンシャル

コーシーリーマンの関係

↓

複素速度ポテンシャル　$\underline{w(z)=\phi(x,y)+i\psi(x,y)}$　**を定義できる。**

?

$w(z)=\phi(x,y)+i\psi(x,y)$　　i:**虚数単位**

$z=x+iy$

↑

実部：速度ポテンシャル
虚部：流れ関数　}　**である複素数の関数**$w(z)$

$w(z)=\phi(x,y)+i\psi(x,y)$　**から速度等を求める方法**

例：理想流体の円柱周りの流れ（一様流速 u_∞ **の流れの中に半径**R**の円柱がある）**

この場合　$w(z)=u_\infty\left(z+\dfrac{R^2}{z}\right)$

↓ $z=x+iy$

$$w(z)=\underbrace{u_\infty x\left(1+\frac{R^2}{x^2+y^2}\right)}_{\text{実部：}\phi}+i\underbrace{u_\infty y\left(1-\frac{R^2}{x^2+y^2}\right)}_{\text{虚部：}\psi}$$

ポテンシャル　　**流れ関数**

実部ϕ　**または虚部：**$\psi \longrightarrow u_x = -\dfrac{\partial \phi}{\partial x},\ u_y = -\dfrac{\partial \phi}{\partial y}$　**または**　$u_x = -\dfrac{\partial \psi}{\partial y},\ u_y = \dfrac{\partial \psi}{\partial x}$

これでもよいが以下に別の方法を示す

$$w(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$$

↓ $z=x+iy$**で微分**

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dx} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} \xrightarrow{\frac{\partial \phi}{\partial x} = -u_x,\ \frac{\partial \psi}{\partial x} = u_y} \frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dx} = \underline{-u_x} + i\underline{u_y}$$

$$w(z) = u_\infty\left(z + \frac{R^2}{z}\right)$$

↓

$$\frac{dw}{dz} = u_\infty\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) = u_\infty\left(1 - \frac{R^2}{(x+iy)^2}\right) = u_\infty\left(1 - \frac{R^2}{x^2 - y^2 + 2xyi}\right)$$

↓ **共役複素数で実数化**

$$x^2 - y^2 - 2xyi$$

$$\frac{dw}{dz} = u_\infty\left(1 - \frac{R^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}\right) + iu_\infty\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

↓ $\dfrac{dw}{dz} = -u_x + iu_y$　**と比較して**

$$u_x = -u_\infty\left(1 - \frac{R^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}\right),\ \ u_y = u_\infty\frac{2xyR^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

以下のようにすると円筒（円柱）座標系でのu_x,u_yを導くことができる

$$\frac{dw}{dz} = u_\infty \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right)$$

$$\downarrow \quad z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = re^{i\theta}$$

cos, sin, e**のテイラー展開から導くことができる**

$$\frac{dw}{dz} = u_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2 e^{2i\theta}} \right) = u_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2} e^{-2i\theta} \right)$$

$$\downarrow \quad e^{-2i\theta} = \cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta) = \cos 2\theta - i\sin 2\theta$$

$$\frac{dw}{dz} = u_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\cos 2\theta \right) + iu_\infty \frac{R^2}{r^2}\sin 2\theta$$

$$\downarrow \quad \frac{dw}{dz} = -u_x + iu_y$$

$$u_x = -u_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\cos 2\theta \right), \; u_y = u_\infty \frac{R^2}{r^2}\sin 2\theta$$

円筒座標系で表した式からわかること

$r = R, \; \theta = \pi$ **または** $r = R, \; \theta = \pi$ **のとき**

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = 2u_\infty \sin\theta = 0$$

図中の2**箇所：よどみ点**

円柱表面の圧力：p, **速度**：u

$\downarrow$ **粘性**=0 $\longrightarrow$ **ベルヌイの定理**

$$\frac{1}{2}\rho u^2 + p = \frac{1}{2}\rho u_\infty^2 + p_\infty$$

円柱表面と無限遠の間の収支

$$\downarrow$$

$$p = \frac{1}{2}\rho(u_\infty^2 - u^2) + p_\infty$$

$$\downarrow \quad r = R \to u^2 = 4u_\infty^2 \sin^2\theta$$

$$p = \frac{1}{2}\rho u_\infty^2 (1 - 4\sin^2\theta) + p_\infty$$

円柱表面の圧力分布 (u_∞**と**p_∞**は既知**)