5.管路内の流れ(P.39)

5・1円管内の流れ

代表的な流体輸送管路:円管

層流と乱流:レイノルズ数で判断

円管内流れのレイノルズ数の定義

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho UL}{\mu}$$ ← 一般的な定義

↓

代表速度: $U\equiv u_{\mathrm{a}}=\frac{Q}{A}=\frac{4Q}{\pi D^2}$ 管断面平均流速

代表速度: D 管内径(直径)

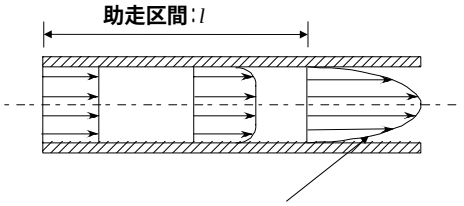
$$\mathrm{Re}=\frac{\rho u_{\mathrm{a}} D}{\mu}$$ 円管内流れのレイノルズ数(資料3参照)

Re<2100 ⟶ 層流　　Re>4000 ⟶ 乱流

助走区間:管入口から一定の速度分布になるまでの区間

層流: $l=0.065\,\mathrm{Re}\,D$

乱流: $l=(25\sim 40)D$



一定の速度分布:発達流れ

5・1・1層流における速度分布

発達流れの速度分布:放物線(資料2参照)

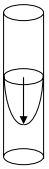
資料2では大きい検査体積(シェルともいう)の運動量収支から導出

↕

運動方程式から導出してみる

1.座標系の決定

円筒(円柱)座標系 ⟶ 解くべき方程式は表3・1,3・4の円筒座標系の式



2.流れ場の特徴の確認

1)定常流れ

全ての式で $\frac{\partial}{\partial t}=0$

2)速度成分はz方向のみ

・運動方程式のr, θ成分の式は不要

・連続の式 $\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho r u_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial \theta}+\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}=0$

↓ 非圧縮性で密度一定

$u_r=0$, $u_\theta=0$

$\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$ さらに $\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}=0$

4)速度はθ方向に変化しない ⟶ $\frac{\partial u_z}{\partial \theta}=0$ さらに $\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2}=0$

以上より

$$\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial t}+u_r\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}=$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right]+\rho g_z$$

↓

$$-\frac{dp}{dz}+\mu\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_z}{dr}\right)+\rho g_z=0 \qquad (5\cdot3)$$

3.境界条件の確認

1) $r=0$ で $\tau_{rz}=-\mu\frac{du_z}{dr}=0$, $\frac{du_z}{dr}=0$

2) $r=R$ で $u_z=0$

4.方程式を解く

$$-\frac{dp}{dz}+\mu\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_z}{dr}\right)+\rho g_z=0 \qquad (5\cdot3)$$

$\frac{dp}{dz}$ は定数として扱う

$$\downarrow$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_z}{dr}\right)=\frac{1}{\mu}\left(\frac{dp}{dz}-\rho g_z\right)r$$

$$\downarrow$$

$$r\frac{du_z}{dr}=\frac{1}{2\mu}\left(\frac{dp}{dz}-\rho g_z\right)r^2+C_1$$

$$\downarrow$$

$$\frac{du_z}{dr}=\frac{1}{2\mu}\left(\frac{dp}{dz}-\rho g_z\right)r+\frac{C_1}{r}$$

$$\downarrow$$

境界条件 1) r=0 で $\frac{du_z}{dr}=0 \longrightarrow C_1=0$

$$\frac{du_z}{dz}=\frac{1}{2\mu}\left(\frac{dp}{dz}-\rho g_z\right)r$$

$$\downarrow$$

$$u_z=\frac{1}{4\mu}\left(\frac{dp}{dz}-\rho g_z\right)r^2+C_2$$

$$\downarrow$$

境界条件 2) r=R で u_z=0 $\longrightarrow$ $0=\frac{1}{4\mu}\left(\frac{dp}{dz}-\rho g_z\right)R^2+C_2$

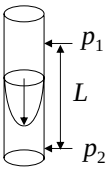
$$\downarrow$$

$$C_2=-\frac{1}{4\mu}\left(\frac{dp}{dz}-\rho g_z\right)R^2$$

$$\downarrow$$

$$u_z=-\left(\frac{dp}{dz}-\rho g_z\right)\frac{R^2}{4\mu}\left\{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right\}$$

$$u_z = -\left(\frac{dp}{dz} - \rho g_z\right)\frac{R^2}{4\mu}\left\{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right\} \qquad (5\cdot4)$$



圧力損失：$\Delta p = p_1 - p_2$　距離Lの間に減少する圧力

ピー：小文字

圧力：流体単位体積あたりのエネルギー
（ベルヌイの定理のところ参照）

Lの間に失われるエネルギー

$$\frac{dp}{dz} = \frac{p_2 - p_1}{L} = -\frac{\Delta p}{L} \qquad (5\cdot5)$$

$$-\left(\frac{dp}{dz} - \rho g_z\right) = \frac{\Delta p}{L} + \rho g_z$$

$$\Delta P = (p_1 - p_2) + \rho g_z L$$

$$-\left(\frac{dp}{dz} - \rho g_z\right) = \frac{\Delta P}{L}$$

配管で輸送する際にポンプなどで補う必要あり

$$u_z = \frac{\Delta P R^2}{4\mu L}\left\{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right\} \qquad (5\cdot6)$$

最大流速u_{zmax}については資料2を参照すること。

$$Q = \int_0^R 2\pi r u dr = \int_0^R 2\pi r \frac{\Delta P R^2}{4\mu L}\left\{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right\} dr = \frac{\pi \Delta P R^4}{8\mu L} \qquad (5\cdot8)\ \text{P.43}$$

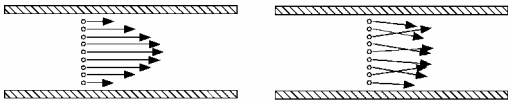
：**ハーゲンポアズイユ**（Hagen-Poiseuille）**の式**
流量と圧力損失の関係を表す

配管により流体を輸送するときにポンプなどで補わなければならないエネルギーを計算する基礎となる式

ただし，これは層流のときしか使えないことに注意

5･1･2乱流における平均速度分布

円管内乱流での流体の動き



層流　　乱流

速度が変動することにより
･運動量･物質･熱の移動が促進
･混合が促進

↑

レイノルズ応力の効果

$$\rho\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t}+\overline{u}_j\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}-\rho\overline{u_i'u_j'}\right)$$

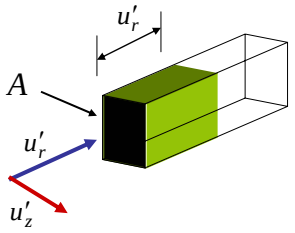
速度の変動による運動量の移動：レイノルズ応力の効果

円管内流れのレイノルズ応力：例えば $\rho u_r' u_z'$

単位時間に入る流体の

体積： $u_r' A$

質量： $\rho u_r' A$



運動量のz方向成分： $\rho u_r' u_z' A$

変動による運動量流束： $\rho u_r' u_z'$

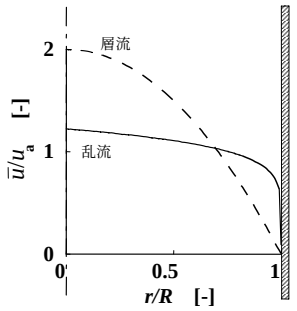
↓

対流であるが応力と見なす

↓

この効果により速い流体と遅い流体が混ざって速度分布が平坦になる

平均速度分布：時間平均を結んだ曲線



層流より平坦

↑

レイノルズ応力

(1)1/7**乗則**

$$\bar{u}_z = \bar{u}_{z\max}\left(1-\frac{r}{R}\right)^{1/7} = \bar{u}_{z\max}\left(\frac{y}{R}\right)^{1/7} \quad (5\cdot11)$$

y：**管壁面からの距離**($=R-r$)

$$Q = \int_0^R 2\pi r u dr = \int_0^R 2\pi r \bar{u}_{\max}\left(1-\frac{r}{R}\right)^{1/7} dr = \frac{49}{60}\pi R^2 \bar{u}_{\max}$$ P.46**問題**5・3

実験では約4/5

(2)**対数法則**:**プラントルの混合距離理論に基づいた半理論式**
乱流場で

剪断応力=粘性応力+レイノルズ応力

↓ **乱流場で粘性応力はレイノルズ応力に対して小さく無視できると仮定**

$$\tau = \rho u_r' u_z' = -\rho l^2 \left|\frac{d\bar{u}_z}{dy}\right| \frac{d\bar{u}_z}{dy}$$ l：**プラントルの混合距離**

↓ $l = ky$：y（**円管壁面からの距離**）**に比例する**
壁面付近では剪断応力は壁面の剪断応力τ_w**にほぼ等しい**

↑ **以上を仮定**

$$\tau_w = -\rho l^2 \left|\frac{d\bar{u}_z}{dy}\right| \frac{d\bar{u}_z}{dy} = -\rho (ky)^2 \left|\frac{d\bar{u}_z}{dy}\right| \frac{d\bar{u}_z}{dy}$$

↓

$$\frac{|\tau_w|}{\rho} = (ky)^2 \left(\frac{d\bar{u}_z}{dy}\right)^2$$

$$\sqrt{\frac{|\tau_w|}{\rho}} = ky\left|\frac{d\bar{u}_z}{dy}\right|$$

$$u^* = \sqrt{\frac{|\tau_w|}{\rho}}$$ ：摩擦速度 ← 管壁面付近を代表する速度

$$\sqrt{\frac{\mathrm{N\cdot m^{-2}}}{\mathrm{kg\cdot m^{-3}}}} \rightarrow \sqrt{\frac{\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-2}\cdot m^{-2}}}{\mathrm{kg\cdot m^{-3}}}} \rightarrow \sqrt{\mathrm{m^2\cdot s^{-2}}} \rightarrow \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$\left|\frac{d\bar{u}_z}{dy}\right| = \frac{u^*}{ky}$$

$$\bar{u}_z = \frac{u^*}{k}\ln y + C_1$$

y：壁からの距離：$y^+ = \dfrac{u^* y}{\nu}$　(ν:動粘度)

速度：$\bar{u}^+ = \dfrac{\bar{u}}{u^*}$ ← いずれも無次元

$$u^+ = \frac{1}{k}\ln y + C_2 \quad (5\cdot17)$$

C_2, kはy^+の値の範囲により異なる

$5 \le y^+ \le 30$　$\bar{u}^+ = -3.05 + 5.0\ln y^+$

$30 \le y^+$　$\bar{u}^+ = 5.5 + 2.5\ln y^+$ ⟶ 教科書P.48図5・6

壁面近傍 $y^+ \le 5$ では

速度分布を直線 $(\bar{u}_z \propto y)$ と仮定

$$|\tau_w| = \mu\left|\frac{d\bar{u}_z}{dy}\right| = \mu\frac{\bar{u}_z}{y}$$

$$\frac{|\tau_w|}{\rho} = \frac{\mu}{\rho}\frac{\bar{u}_z}{y} = \nu\frac{\bar{u}_z}{y}$$

$$\frac{|\tau_w|}{\rho} = u^{*2}$$

$$\frac{\bar{u}_z}{u^*} = \frac{yu^*}{\nu} \longrightarrow u^+ = y^+$$ この式で表される領域：粘性底層