

3・4エネルギー収支(P.30)

3・4・1一般的なエネルギー収支

エネルギー収支:流体が流れるときのエネルギーの時間に対する変化を表す

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \right) = - \left(\nabla \cdot \frac{1}{2} \rho u^2 \mathbf{u} \right) - (\nabla \cdot p \mathbf{u}) - p(-\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}]) - (-\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u}) + \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}) \quad (3 \cdot 10)$$

∇ , $(-\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u})$ 等についてはベクトル解析をよく勉強して理解すること

この式はどうやって導かれるか

流体の応力方程式(流動特性代入前の運動方程式)

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y u_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z u_x)}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x$$

- ・授業資料4-15にある式
- ・非圧縮性でなくても成り立つ式
- ・上の式はx方向成分の式
- ・本来はx, y, z全ての成分からなるベクトル

ベクトル表示した応力方程式の両辺と速度ベクトル $\mathbf{u}$ の内積 → (3・10)式

簡単にいえば応力方程式のx, y, z方向の式にそれぞれ u_x, u_y, u_z をかけ、全てたすと(3・10)になる

応力方程式と比較して、エネルギー収支式の意味を確認

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \right) = - \left(\nabla \cdot \frac{1}{2} \rho u^2 \mathbf{u} \right) - (\nabla \cdot p \mathbf{u}) - p(-\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}]) - (-\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u}) + \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}) \quad (3 \cdot 10)$$

Diagram illustrating the correspondence between terms in the energy balance equation and the momentum equation:

- I: $\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t}$
- II: $\frac{\partial(\rho u_x^2)}{\partial x}$
- III: $\frac{\partial(\rho u_y u_x)}{\partial y}$
- IV: $\frac{\partial(\rho u_z u_x)}{\partial z}$
- V: $-\frac{\partial p}{\partial x}$
- VI: $-\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$
- VII: ρg_x

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \right) = - \left(\nabla \cdot \frac{1}{2} \rho u^2 \mathbf{u} \right) - (\nabla \cdot p \mathbf{u}) - p(-\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}]) - (-\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u}) + \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{g})$$

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y u_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z u_x)}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x$$

I
II
III
IV
V
VI
VII

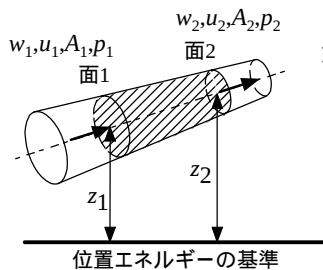
それぞれ流体単位体積あたりの運動エネルギーの

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| I. 単位時間あたりの変化 | V. 粘性に基づく応力による仕事 |
| II. 対流による移動 | VI. 粘性による内部エネルギーへの変換分 |
| III. 周囲からの圧力による仕事 | VII. 重力による仕事 |
| IV. 圧力による内部エネルギーへの変換分 | |

粘性による摩擦で運動エネルギーが熱に変換される：散逸エネルギー

$-(-\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u})$: 散逸関数 → (P.31表3・5)

3・4・2ベルヌイの定理：摩擦(粘性)のない流体の定常エネルギー収支



斜線の検査体積についてのエネルギー収支

条件：定常

断面で流速一定

粘性無し(摩擦損失=0)

単位時間に面1から入る

運動エネルギー： $\frac{1}{2} w_1 u_1^2 = \frac{1}{2} \rho u_1 A_1 u_1^2 = \frac{1}{2} \rho u_1^3 A_1$ [W]

位置エネルギー： $w_1 g z_1 = \rho u_1 A_1 g z_1$ [W]

圧力エネルギー： $p_1 A_1 u_1$ [W]

$(p_1 A_1$: 面1にかかる力 u_1 : 単位時間移動距離 → $p_1 A_1 u_1$: 圧力による仕事)

	面1(入る)	面2(出る)
運動エネルギー	$\frac{1}{2}\rho u_1^3 A_1$	$\frac{1}{2}\rho u_2^3 A_2$
位置エネルギー	$\rho u_1 A_1 g z_1$	$\rho u_2 A_2 g z_2$
圧力エネルギー	$p_1 A_1 u_1$	$p_2 A_2 u_2$

以上3つのそれぞれの面についての総和が等しい

$$\frac{1}{2}\rho u_1^3 A_1 + \rho u_1 A_1 g z_1 + p_1 A_1 u_1 = \frac{1}{2}\rho u_2^3 A_2 + \rho u_2 A_2 g z_2 + p_2 A_2 u_2$$



連続の式 $\rho u_1 A_1 = \rho u_2 A_2$

$$\frac{1}{2}u_1^2 + g z_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{1}{2}u_2^2 + g z_2 + \frac{p_2}{\rho} = \text{一定}$$

ベルヌイの定理
教科書P.33図3・12の式

導かれたベルヌイの定理の式 $\frac{1}{2}u^2 + g z + \frac{p}{\rho} = \text{一定}$

教科書P.31(3・11)式の圧力項: $\int \frac{dp}{\rho}$ 非圧縮性流体では $\int \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{\rho} \int dp = \frac{p}{\rho}$

ベルヌイの定理の式の各項の意味: 次元の変換

$$\frac{1}{2}u^2 + g z + \frac{p}{\rho} = \text{一定}$$

次元: 単位質量あたりのエネルギー
[m²・s⁻²]



ρ をかける

$$\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho g z + p = \text{一定}$$

次元: 圧力 [Pa]

動圧 + 静圧 = 総圧

動圧

静圧

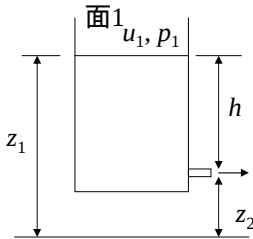


ρg で除する

$$\frac{u^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = \text{一定}$$

次元: 長さ(高さ) ≡ ヘッド [m]

ベルヌイの定理についての例題：図のような水槽の底付近の出口から流れる流体の速度を求めよ。



解：水面を面1，出口を面2とすると

$$\frac{1}{2}u_1^2 + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{1}{2}u_2^2 + gz_2 + \frac{p_2}{\rho}$$

・水槽の径が十分大きいので $u_1=0$
 ・ p_1, p_2 はいずれも大気圧で等しい
 ・ $z_1 - z_2 = h$

$$u_2^2 = 2g(z_1 - z_2)$$

$$u_2 = \sqrt{2gh}$$

4. 流れの数値シミュレーション(P.35)

4.1 数値シミュレーションの方法(P.36)

ナビエ - ストークス(Navier-Stokes)の運動方程式(ニュートン流体の運動方程式)

多くの場合解析的に解くことはできない



数值的に解く

関数の形は与えられている

4.1.1 差分法

微分方程式 $\frac{du}{dt} = f(t)$ $f(t)$ が積分できない場合 → 解析的に解けない

$t=t$ のときの u の値 $u(t)$ がわかっている場合に差分法で解く手順

$\frac{du}{dt}$ を別の形に書き換えてみる ← テイラー(Taylor)展開

テイラー展開: $u(t+\Delta t)$ を $u(t)$ で表す

$$u(t+\Delta t) = u(t) + \Delta t \frac{du}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\Delta t^3}{3!} \frac{d^3u}{dt^3} + \dots$$

↓ $\frac{du}{dt}$ について解く

$$\frac{du}{dt} = \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2!} \frac{d^2u}{dt^2} - \frac{\Delta t^2}{3!} \frac{d^3u}{dt^3} + \dots$$

↓

$$\frac{du}{dt} \approx \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t}$$

・これらの項を無視
・この部分が誤差となる

↓

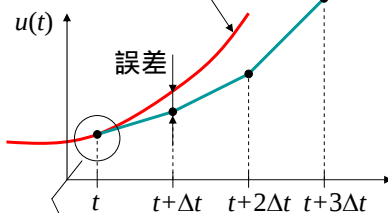
元の方程式 $\frac{du}{dt} = f(t)$ に代入

$$\frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} = f(t) \longrightarrow u(t+\Delta t) = u(t) + \Delta t f(t)$$

微分方程式の離散化(この場合は差分化): 連続する t に対する値は得られない

$u(t+\Delta t) = u(t) + \Delta t f(t)$: この関係を利用して時刻 t 以降の u を計算

$u(t)$ の正しい解の曲線



$u(t+\Delta t) = u(t) + \Delta t f(t)$ $u(t)$ の値は既知

$u(t+2\Delta t) = u(t+\Delta t) + \Delta t f(t+\Delta t)$

$u(t+3\Delta t) = u(t+2\Delta t) + \Delta t f(t+2\Delta t)$

⋮

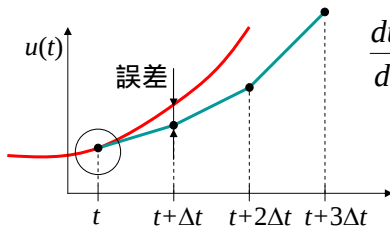
・ t 以降 Δt 刻みで u が計算される
 $t+\Delta t, t+2\Delta t, t+3\Delta t \dots$

↑
離散化のため間の値は計算されない

・ 上のような繰返し計算はコンピュータが適している

・ この直線の傾きに誤差はない
・ 正解の曲線に接している

誤差の原因



$$\frac{du}{dt} = \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2!} \frac{d^2u}{dt^2} - \frac{\Delta t^2}{3!} \frac{d^3u}{dt^3} + \dots$$

無視

$$u(t+\Delta t) = u(t) + \Delta t f(t)$$

$t - \Delta t$ 間を直線に近似したことが原因

誤差を小さくするために

- ・ Δt を小さくする(一つの方法): 無視した部分が小さくなる
- ・ 差分化には上記以外にも方法があり, できるだけ誤差が小さくなるような形に差分化する。

流体の運動方程式に似た簡単な式の離散化(差分化)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad u(t, x) \quad u \text{は } t, x \text{の関数のため偏微分}$$

↓ 偏微分でも同様に差分化できる

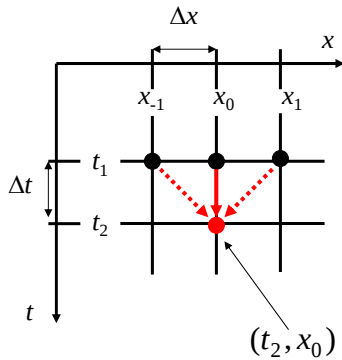
$$\frac{u(t_2, x_0) - u(t_1, x_0)}{\Delta t} + c \frac{u(t_1, x_1) - u(t_1, x_{-1})}{2\Delta x} = v \frac{u(t_1, x_{-1}) - 2u(t_1, x_0) + u(t_1, x_1)}{\Delta x^2}$$

(教科書P.37の式の $O(\Delta t, \Delta x^2)$ は誤差のオーダーを表している)

$$u(t_2, x_0) = u(t_1, x_0) - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{u(t_1, x_1) - u(t_1, x_{-1})}{2} + v \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u(t_1, x_{-1}) - 2u(t_1, x_0) + u(t_1, x_1))$$

$$u(t_2, x_0) = u(t_1, x_0) - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{u(t_1, x_1) - u(t_1, x_{-1})}{2} + v \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u(t_1, x_{-1}) - 2u(t_1, x_0) + u(t_1, x_1))$$

$u(t_1, x_{-1}), u(t_1, x_0), u(t_1, x_1)$ がわかれば $u(t_2, x_0)$ を計算できる



$$t_2 = t_1 + \Delta t, \quad x_1 = x_0 + \Delta x = x_{-1} + 2\Delta x$$

・ 2つの独立変数 t, x のため, 離散化のイメージは格子状になる
(教科書P.37図4・1参照)

・ 問題を解く範囲の両端の値が境界条件等として与えられればその範囲内の u が計算できる

(t_2, x_0) : この点の u が計算される

本当に解かなければならない方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t} + u_x \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + u_y \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial y} + u_z \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \\ \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial t} + u_x \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial x} + u_y \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + u_z \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y \\ \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial t} + u_x \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial x} + u_y \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial y} + u_z \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z \end{aligned}$$

離散化する方法は多様であり, また難しい



市販のソフトウェアを利用するの一つの方法



化工情報処理第一の後半で演習