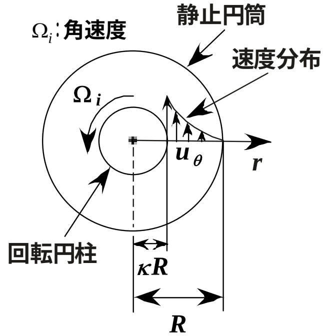
3･3･1一般的な運動量収支　(運動方程式から速度分布を求める例題のつづき)

例題：回転する円柱と静止円筒間の流体の円周方向の流れ（定常）



$0<\kappa<1$
カッパ

1.**座標系の決定**

円筒(円柱)座標系 ⟶ **解くべき方程式は表3･1,3･4の円筒座標系の式**

(円周方向：θ方向，　紙面垂直方向：z方向)

2.**流れ場の特徴の確認**

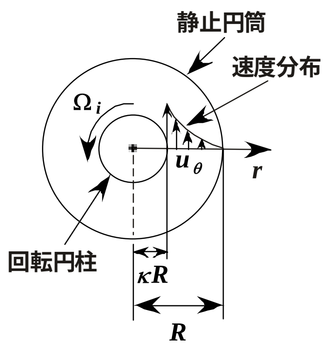
1)**定常流れ　全ての式で** $\dfrac{\partial}{\partial t}=0$

2)**速度成分はθ方向のみ**

･**運動方程式のr, z成分の式は不要**

･**連続の式**

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho r u_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial \theta}+\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}=0 \xrightarrow[\text{非圧縮で}\rho\text{一定ならば}]{u_r=0,\ \ u_z=0} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}=0 \text{ さらに } \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2}=0$$



3)**回転の中心について対称**

↓

圧力はθ方向に変化しない ⟶ $\dfrac{\partial p}{\partial \theta}=0$

4) **θ方向は鉛直に対して垂直**

↓

$g_\theta=0$

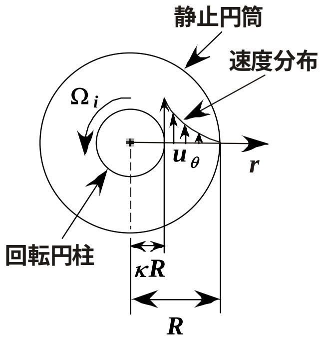
以上より

$$\frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial t}+u_r\frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial \theta}+\frac{\rho u_r u_\theta}{r}+u_z\frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial z}=$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}\right]+\rho g_\theta$$

↓

$$0=\mu\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r u_\theta)\right)$$



3.**境界条件の確認**

1) $r = R$ **で** $u_\theta = 0$

2) $r = \kappa R$ **で** **回転円柱と等しい速度**

回転円柱の角速度：Ω_i

速度 ：$\Omega_i \kappa R$ $\longrightarrow$ $u_\theta = \Omega_i \kappa R$

4.**方程式を解く**

$$\mu \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru_\theta)\right) = 0$$

積分

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru_\theta) = C_1$$

境界条件はいずれもu_θ**についてのものなのでまだ**C_1**は決定できない。**

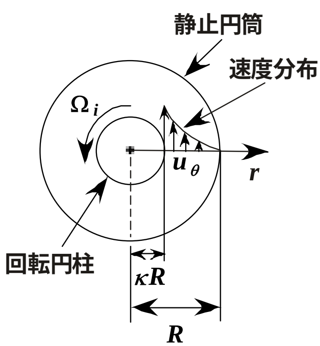
$$\downarrow$$

$$\frac{d}{dr}(ru_\theta) = C_1 r$$

$$\downarrow$$

$$ru_\theta = \frac{1}{2}C_1 r^2 + C_2 \longrightarrow u_\theta = \frac{1}{2}C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

$$u_\theta = \frac{1}{2}C_1 r + \frac{C_2}{r}$$



1) $r = R$**で**$u_\theta = 0$ **より** $0 = \frac{1}{2}C_1 R + \frac{C_2}{R}$

2) $r = \kappa R$**で**$u_\theta = \Omega_i \kappa R$ **より** $\Omega_i \kappa R = \frac{1}{2}C_1 \kappa R + \frac{C_2}{\kappa R}$

これをC_1, C_2**についての連立方程式として解く**

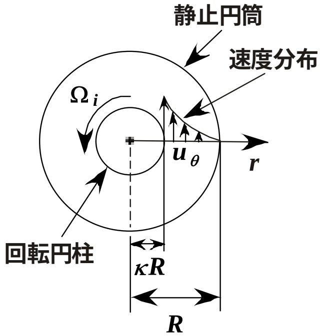
$$C_1 = -2\Omega_i \frac{\kappa^2}{\kappa^2 - 1}, \quad C_2 = \frac{\Omega_i \kappa^2 R^2}{\kappa^2 - 1}$$

$$\downarrow$$

$$u_\theta = \frac{\Omega_i \kappa^2 R}{1 - \kappa^2}\left(\frac{R}{r} - \frac{r}{R}\right)$$

この装置を利用して流体の粘度を測定：粘度計

回転粘度計の原理



z方向の高さ:L

円柱表面：流体から粘性に基づく応力を受ける

P.22表3･3より $\tau_{r\theta}=-\mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right]$

↓

また，u_r=0のため

$$\tau_{r\theta}=-\mu r\frac{d}{dr}\left(\frac{u_\theta}{r}\right)$$

↓　$u_\theta=\frac{\Omega_i\kappa^2R}{1-\kappa^2}\left(\frac{R}{r}-\frac{r}{R}\right)$ を代入

$$\tau_{r\theta}=2\mu\Omega_i\frac{\kappa^2}{1-\kappa^2}\frac{R^2}{r^2}$$

↓　円柱表面の応力：$r=\kappa R$

$$\tau_{r\theta}\big|_{\kappa R}=\frac{2\mu\Omega_i}{1-\kappa^2}$$

円柱表面にかかる力：$F=\tau_{r\theta}\big|_{\kappa R}\cdot A=\frac{2\mu\Omega_i}{1-\kappa^2}\cdot 2\pi\kappa RL=4\pi\mu\Omega_i RL\frac{\kappa}{1-\kappa^2}$

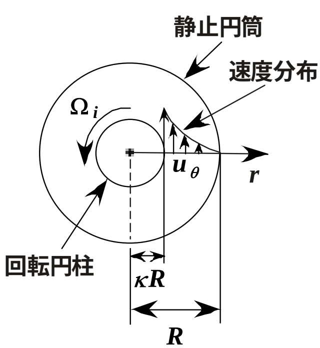
$$F=\tau_{r\theta}\big|_{\kappa R}\cdot A=4\pi\mu\Omega_i RL\frac{\kappa}{1-\kappa^2}$$

R,L,κは装置の寸法

Ω_iは操作条件

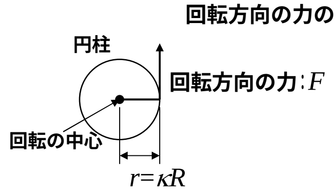
↓

Fが測定できれば粘度μがわかる



実際に測定するのはトルク：T

回転方向の力のモーメント



$$T=Fr=4\pi\mu\Omega_i RL\frac{\kappa}{1-\kappa^2}\cdot\kappa R$$

$$=4\pi\mu\Omega_i R^2L\frac{\kappa^2}{1-\kappa^2}$$

トルクの測定結果から粘度μがわかる

この問題の補足(重要:自習すること)

問題を解く過程で

2.流れ場の特徴の確認　2)速度成分はθ方向のみ　・運動方程式のr, z成分の式は不要

とあったが,r,z成分の式は実は全ての項が0とはならない。

r,z成分の式は次のようになる(P.23表3・4参照)
なぜそうなるかは各自考えること

r成分: $\dfrac{\rho u_\theta^2}{r} = \dfrac{\partial p}{\partial r}$　　$\dfrac{\rho u_\theta^2}{r}$は遠心力

この式は流体の回転運動に基づく遠心力により内側から外側に向って圧力が高くなることを表している。

z成分: $\dfrac{\partial p}{\partial z} = \rho g_z \xrightarrow[g_z = g]{\text{積分}} p = \rho g z + C$

この式は液面から深さ方向に重力により水圧が高くなっていくことを表している。

速度分布を求める過程では上の2式を考える必要はない。しかし,例えばこのような装置の外側の円筒の強度を考える場合は,速度分布を求めた上でこれらの式によって遠心力,重力により円筒にかかる圧力がどの程度かを見積る必要がある。

3・3・2乱流場のナビエーストークスの運動方程式(P.25)

乱流場:流体はナビエーストークスの運動方程式に従う

乱流場の運動方程式を導出する(教科書P.25図3・7)

※資料4-19の式の左辺のρをくくりだした形, x方向成分の式

$$\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + \underline{u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) + \rho g_x$$

以下の変形をやりやすくするために次のように書きかえる

$u_x\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial x} + \dfrac{\partial u_y}{\partial y} + \dfrac{\partial u_z}{\partial z}\right)$ を加える

非圧縮性流体では $\dfrac{\partial u_x}{\partial x} + \dfrac{\partial u_y}{\partial y} + \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = 0$ なので問題なし

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_x\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z} + u_x\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial u_x^2}{\partial x} + \frac{\partial u_x u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_x u_z}{\partial z}$$

書換えにより，元の方程式は次のようになる

$$\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}+\frac{\partial u_x^2}{\partial x}+\frac{\partial u_x u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_x u_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)+\rho g_x$$

↓ 教科書P.16の説明と同様に添字i,jを用いる
外力のない場合を考える

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_j}+\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

↓ $u_i=\overline{u_i}+u_i',\quad p=\overline{p}+p'$ を代入

$$\rho\left(\frac{\partial(\overline{u}_i+u_i')}{\partial t}+\frac{\partial(\overline{u}_i+u_i')(\overline{u}_j+u_j')}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial(\overline{p}+p')}{\partial x_j}+\mu\frac{\partial^2(\overline{u}_i+u_i')}{\partial x_j^2}$$

↓ 両辺の時間平均をとる

両辺の時間平均をとる

$$\rho\left(\overline{\frac{\partial(\overline{u}_i+u_i')}{\partial t}}+\overline{\frac{\partial(\overline{u}_i+u_i')(\overline{u}_j+u_j')}{\partial x_j}}\right)=-\overline{\frac{\partial(\overline{p}+p')}{\partial x_j}}+\mu\overline{\frac{\partial^2(\overline{u}_i+u_i')}{\partial x_j^2}}$$

教科書P.11-12の平均値に関するレイノルズの法則(2･3)式より

$$\overline{\frac{\partial(\overline{u}_i+u_i')}{\partial t}}=\frac{\partial\overline{(\overline{u}_i+u_i')}}{\partial t}=\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial t}+\frac{\partial\overline{u_i'}}{\partial t}=\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial t}$$

($\overline{u_i'}=0,\ \overline{p}'=0$ のため)

$$\overline{\frac{\partial(\overline{p}+p')}{\partial x_j}}=\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_j}\qquad \mu\overline{\frac{\partial^2(\overline{u}_i+u_i')}{\partial x_j^2}}=\mu\frac{\partial^2\overline{u}_i}{\partial x_j^2}$$

$$\overline{(\overline{u}_i+u_i')(\overline{u}_j+u_j')}=\overline{\overline{u}_i\overline{u}_j+u_j'\overline{u}_i+u_i'\overline{u}_j+u_i'u_j'}$$

$$=\overline{u}_i\overline{u}_j+\overline{u_j'\overline{u}_i}+\overline{u_i'\overline{u}_j}+\overline{u_i'u_j'}$$

↓ $\overline{u_i'\overline{u}_j}=\overline{u_i'}\,\overline{u}_j=0\qquad \overline{u_j'\overline{u}_i}=\overline{u_j'}\,\overline{u}_i=0$

$$=\overline{u}_i\overline{u}_j+\overline{u_i'u_j'}$$

$$\overline{\frac{\partial(\overline{u}_i+u_i')(\overline{u}_j+u_j')}{\partial x_j}}=\frac{\partial\overline{u}_i\overline{u}_j}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{u_i'u_j'}}{\partial x_j}$$

↓

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}+\frac{\partial \bar{u}_i\bar{u}_j}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{u_i'u_j'}}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}+\mu\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i\bar{u}_j}{\partial x_j}=\bar{u}_j\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}+\bar{u}_i\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j}$$

$$\bar{u}_i\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j}=\bar{u}_x\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x}+\bar{u}_x\frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y}+\bar{u}_x\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}=\bar{u}_x\left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x}+\frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y}+\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}\right)=0$$

であるから

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}+\bar{u}_j\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}-\underline{\rho\overline{u_i'u_j'}}\right)}$$

乱流場の時間平均についての

ナビエーストークスの運動方程式

<u>レイノルズの方程式</u> (3・5)

元の方程式との比較

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_j}+\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

粘性応力に新たな項が加わっている

$\boxed{-\rho\overline{u_i'u_j'}}$:速度が変動することによって生じる見かけ上の応力 <u>レイノルズ応力</u>

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}+\bar{u}_j\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}-\rho\overline{u_i'u_j'}\right) \quad (3\cdot5)$$

$-\rho\overline{u_i'u_j'}$:レイノルズ応力 ← 速度変動は予測できないので理論的に求めることは不可能

↓

レイノルズの方程式は解析的には解けない

流れをモデル化(現象論的方法) → $-\rho\overline{u_i'u_j'}$ と $\dfrac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$ を関連付ける

↓

方程式を解ける形にする

教科書P.26参照

a)乱流拡散係数(渦拡散係数) (乱流動粘度，渦動粘度ともいう)

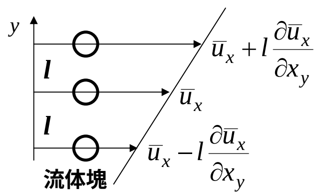
$$-\rho\overline{u_i'u_j'}=\rho\varepsilon_{ij}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right) \quad (3\cdot6)$$ 教科書の式の右辺の負号をとる

- これを3･5に代入する。<u>乱流場では見かけ上粘度が$\rho\varepsilon_{ij}$だけ増加</u>したような形となる
- (3･5)は解ける形になるが，乱流拡散係数εを推定しなければならない
- εは粘度のような物性ではないので簡単には推定できない

b)混合距離

$$-\rho\overline{u_i'u_j'}=\rho l^2\left|\frac{\partial\overline{u}_x}{\partial x_y}\right|\left(\frac{\partial\overline{u}_x}{\partial x_y}\right)\quad(3\cdot8)$$ 教科書の式の右辺の負号をとる

- 乱流場をランダムに動く小さい流体の塊(流体塊)の集合とみなす
- 流体塊は混合距離lに相当する距離を移動する間は一定の速度変動値を維持する
- 流体塊のランダムな運動を分子運動と似たものであると考えるとlは分子の平均自由行程に対応する概念ということができる



速度変動u_x'を左図のl離れた位置にある流体塊の速度の差と見なす

$$u_x'=\overline{u}_x+l\frac{\partial\overline{u}_x}{\partial x_y}-\overline{u}_x=l\frac{\partial\overline{u}_x}{\partial x_y}$$

レイノルズ応力は二つの速度変動の積であるから，混合距離を用いると(3･8)式のように表すことができる。絶対値を使っているのはレイノルズ応力と速度勾配の符号をあわせるためである。

P.26-P.28をよく読んでその内容を理解しておくこと。

3･3･3運動方程式の無次元化(P.29)

無次元化：スケールアップの際，小さい装置と大きい装置管の流れの状態の違いを明らかにするためにとられる方法

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_j}+\mu\frac{\partial^2u_i}{\partial x_j^2}+\rho g_i$$

式中のu_x,u_y,u_z,p,t,x,y,zを無次元化

流れ場の代表量で割る，あるいはかける

速度：U，長さ：L，圧力P

$$u_i^*=\frac{u_i}{U},\ p^*=\frac{p}{P},\ t^*=\frac{tU}{L},\ x_i^*=\frac{x_i}{L}$$

$$\frac{U^2}{L}\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*}+u_j^*\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*}\right)=-\frac{P}{\rho L}\frac{\partial p^*}{\partial x_j^*}+\frac{U\mu}{\rho L^2}\frac{\partial^2u_i^*}{\partial x_j^{*2}}+g\frac{g_i}{g}$$

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*}+u_j^*\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*}=-\frac{P}{\rho U^2}\frac{\partial p^*}{\partial x_j^*}+\frac{\mu}{\rho UL}\frac{\partial^2u_i^*}{\partial x_j^{*2}}+\frac{gL}{U^2}\frac{g_i}{g}$$

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*}+u_j^*\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*}=-\frac{P}{\rho U^2}\frac{\partial p^*}{\partial x_j^*}+\frac{\mu}{\rho UL}\frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^{*2}}+\frac{gL}{U^2}\frac{g_i}{g}$$

この式で*がついている項は全て無次元

↓

$\frac{P}{\rho U^2}$, $\frac{\mu}{\rho UL}$, $\frac{gL}{U^2}$ も全て無次元

$\mathrm{E}=\frac{P}{\rho U^2}$:オイラー数　$\mathrm{Re}=\frac{\rho UL}{\mu}$:レイノルズ数　$\mathrm{Fr}=\frac{U^2}{gL}$:フルード数

↓

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*}+u_j^*\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*}=-\mathrm{E}\frac{\partial p^*}{\partial x_j^*}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^{*2}}+\frac{1}{\mathrm{Fr}}\frac{g_i}{g} \quad (3\text{・}9)$$

装置の大きさ, 流体の性質が違っていても3つの無次元数が等しければ(3・9)の解は一致

↓

流れの状態が一致 ⟶ 流れが相似

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*}+u_j^*\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*}=-\mathrm{E}\frac{\partial p^*}{\partial x_j^*}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^{*2}}+\frac{1}{\mathrm{Fr}}\frac{g_i}{g}$$

↓ ある流れ場でこの方程式が次のように省略できるものとする

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^{*2}}=0$$

この場合はReが等しければ流れの状態は一致する

$\mathrm{Re}=\frac{\rho UL}{\mu}$　以下いずれもMKS単位系: $\rho[\mathrm{kg\cdot m^{-3}}]$, $\mu[\mathrm{Pa\cdot s}]$, $U[\mathrm{m\cdot s^{-1}}]$, $L[\mathrm{m}]$

条件1　$\rho=1000,\ \mu=0.001,\ U=0.01,\ L=0.1\rightarrow \mathrm{Re}=1000$

条件2　$\rho=1000,\ \mu=0.001,\ U=0.001,\ L=1.0\rightarrow \mathrm{Re}=1000$

条件3　$\rho=1000,\ \mu=0.005,\ U=0.01,\ L=0.5\rightarrow \mathrm{Re}=1000$

以上の3条件は代表速度, 装置の代表長さ, 物性などが異なるがいずれもRe=1000なので流れの状態は一致