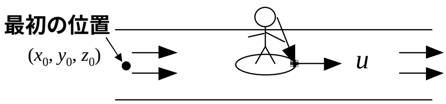
2.流れの状態の表現

2･1ラグランジュの方法とオイラーの方法(P.7)

流体：流路全域を満たして連続して流れる ⟶ **何に注目して観測，計測する？**

a)ラグランジュ(Lagrange)の方法



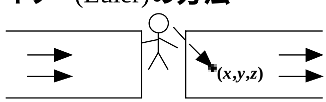
川の流れと同じ速度で動くカヌーに乗る人

- 流れと共に動く座標に視点を固定
- 速度u，着目点の位置(x, y, z)，は
  時刻tとカヌーの最初の位置$\underline{x}_0$の関数

$u=g(t, x_0, y_0, z_0)$　　(x_0, y_0, z_0)

$$(x, y, z)=f(t, x_0, y_0, z_0)=\int_0^t u\,dt=\int_0^t g(t, x_0, y_0, z_0)\,dt$$

b)オイラー(Euler)の方法



橋の上の人

- 1点に視点を固定
- 着目点の速度uは
  時刻tと視点の位置$\underline{x}$の関数

(x, y, z)

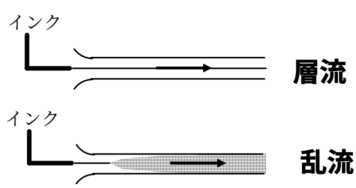
$u=f(t, x, y, z)$

2･2定常流と非定常流，2･3一様流と非一様流

2･4流線，流跡線，流管

⟶
- 教科書P.7-9参照
- 流線などについては後半で解説

2･5層流と乱流



何をもって判定するか？

流れの状態を代表する指標は？

レイノルズ(Reynolds)数：慣性力と粘性力の比

慣性力：運動エネルギーに基づく $\propto \rho u^2$

粘性力：剪断応力に基づく $\propto \mu\dfrac{u}{l}$

$$\longrightarrow \quad \mathrm{Re}=\frac{\rho u^2}{\mu\frac{u}{l}}=\frac{\rho u l}{\mu}$$

無次元数

l:**代表長さ**, u:**代表流速**

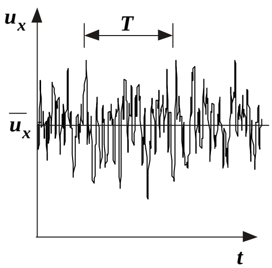
円管: $l=D$ (管内径),
$u_a=4Q/\pi D^2$ (管断面平均流速) $\longrightarrow \mathrm{Re}=\dfrac{\rho u_a D}{\mu}$

Re<2100 ⟶ **層流**

Re>4000 ⟶ **乱流**

2･5･3乱流場の変動量と平均量

乱流場の流速の表し方



速度: $u_x(t)=\overline{u_x}+u'_x(t)$

$\bar{u}_x$:**時間平均** $\equiv \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T u_x(t)dt$

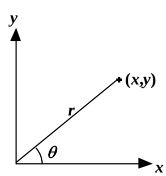
$u'_x(t)$:**変動値(平均からのずれ)**

$$\underline{\bar{u}_x}=\frac{1}{T}\int_0^T u_x(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T(\bar{u}_x+u'_x(t))dt$$
$$=\frac{1}{T}\int_0^T \bar{u}_x dt+\frac{1}{T}\int_0^T u'_x(t)dt$$
$$=\underline{\bar{u}_x+\bar{u}'_x}$$

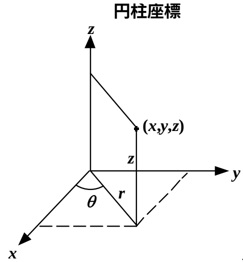
したがって $\bar{u}'_x=0$

教科書3.収支式 のための準備

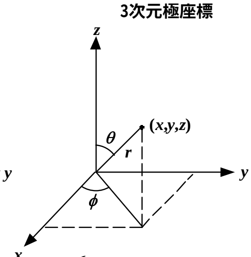
2次元極座標



円柱座標



3次元極座標



$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$
$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta=\tan^{-1}\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

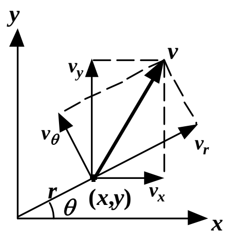
$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$$
$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta=\tan^{-1}\dfrac{y}{x} \\ z=z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\phi \\ y=r\sin\theta\sin\phi \\ z=r\cos\theta \end{cases}$$
$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta=\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ \phi=\tan^{-1}\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

2次元極座標、円柱座標のr-θ平面上での速度ベクトル表示

$$v_r = \frac{dr}{dt},\ v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$$

$$\downarrow$$



$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dr\sin\theta}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\theta + r\frac{d\sin\theta}{dt}$$
$$= v_r\sin\theta + v_\theta\cos\theta$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dr\cos\theta}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\theta + r\frac{d\cos\theta}{dt}$$
$$= \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\frac{d\theta}{dt}\sin\theta$$
$$= v_r\cos\theta - v_\theta\sin\theta$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_r\cos\theta - v_\theta\sin\theta)^2 + (v_r\sin\theta + v_\theta\cos\theta)^2} = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$$

2次元極座標、円柱座標のr-θ平面上での関数fの偏微分

fのr, θについての偏微分をx, yについての偏微分に変換

fはxとyの関数かつrとθの関数 $\longrightarrow$ $\dfrac{dg}{dx} = \dfrac{dg}{dz}\dfrac{dz}{dx}$ を偏微分に適用

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

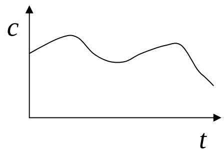
$$\downarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta},\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}$$

3.収支式

3･1時間変化率の表示法(P.13)

c:観測の対象となる量 (速度, 圧力, 温度, 濃度等)

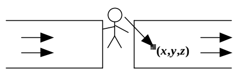


時間に対する変化を微分で表示

c**は**時間t，位置(x,y,z)の関数

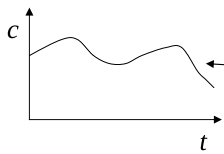
観測の方法(Lagrange，Euler**等**)**により異なる。**

a)**流れ場と無関係に固定された座標軸を用いた表示法**(Euler**の方法**)



$c=f(t, x, y, z)$

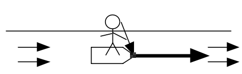
(x, y, z)**は固定**



観測された曲線の時間微分: $\dfrac{\partial c}{\partial t}$

(x, y, z)**が一定のときの偏微分**

b)**流れ場と無関係に，ある速度で移動する座標軸を用いた表示法**



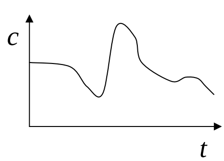
カヌーではなくモーターボートに乗る人

･ボートは川の流れと異なる速度で移動

$c=f(t, x, y, z)$

時間の経過と共に観測点も変化

$(x, y, z) = g(t, x_0, y_0, z_0)$



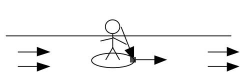
観測曲線の時間微分: $\dfrac{dc}{dt} = \dfrac{\partial c}{\partial t} + \dfrac{\partial c}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial c}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial c}{\partial z}\dfrac{dz}{dt}$

(**全微分**)

$\mathbf{v} = \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right)$:**ボートの速度**

c)**流れ場と同じ速度で移動する座標軸を用いた表示法**

ラグランジュ(Lagrange)**の方法**



カヌーに乗る人

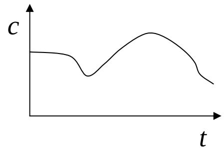
$c=f(t, x, y, z)$

b)**の特別な場合**

たまたま移動速度が流体の速度

$\mathbf{u}=(u_x, u_y, u_z)$ **と等しい**

観測曲線の時間微分：



$$\frac{Dc}{Dt}=\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial c}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial c}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial c}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$\mathbf{v}=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)=(u_x,u_y,u_z)$$ **流体の速度**

$$\underline{\frac{Dc}{Dt}=\frac{\partial c}{\partial t}+u_x\frac{\partial c}{\partial x}+u_y\frac{\partial c}{\partial y}+u_z\frac{\partial c}{\partial z}}$$

流れと共に移動しながら観測した変化：実質微分

以下，教科書3章では以下の条件で流れについての基礎方程式を導く

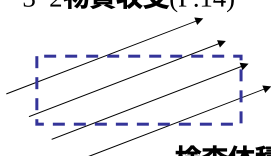
・**非定常も考慮**：$\frac{\partial c}{\partial t}\neq 0$

・**全ての方向に速度成分があり，それぞれが全ての方向に変化することを考慮(三次元流れ)**

$$u_x\neq 0,u_y\neq 0,u_z\neq 0,\frac{\partial c}{\partial x}\neq 0,\frac{\partial c}{\partial y}\neq 0,\frac{\partial c}{\partial z}\neq 0,$$

その後，基礎方程式を利用して定常，一次元の簡単な例題を解いてみる。

3・2物質収支(P.14)



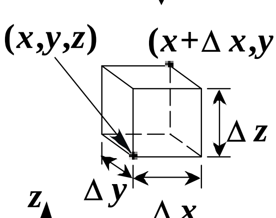
非定常の場合の検査体積についての流体の質量の収支

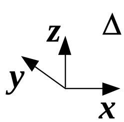
入る量－出る量＝変化率

いずれも単位時間あたりの量

3・2・1一般的な物質収支

資料2-1,A2での検査体積のとり方の原則：
・**流れに沿って**
・**変化のある方向は薄く**

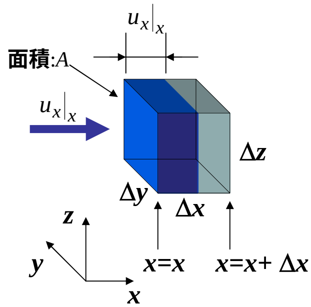




・**三次元流れでは流れに沿って長い体積は取れない**
・**全ての方向に変化がある**

全ての方向の長さが微小である検査体積

微小検査体積についての物質(質量)収支

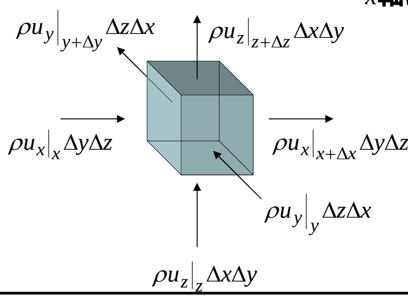


単位時間に
入る量－出る量＝変化率

質量の入る，出る：流れによる移動のみ

x**軸に垂直な面**$(x=x)$**を通り**
単位時間に検査体積に入る流体の

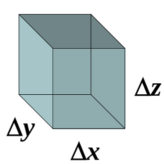
体積： $u_x|_x A = u_x|_x \Delta y \Delta z$　**質量：** $\rho u_x|_x \Delta y \Delta z$



x**軸に垂直な面**$(x=x+\Delta x)$**を通り**
単位時間に検査体積を出る流体の

質量： $\rho u_x|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$

y，z**軸方向の入る量，出る量も同様**



変化率

微小検査体積内の流体の質量： $\rho \Delta x \Delta y \Delta z$

その時間変化率： $\dfrac{\partial(\rho \Delta x \Delta y \Delta z)}{\partial t} = \dfrac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z$

収支式：入る量－出る量＝変化率

x，y，z**方向の入る量，出る量，変化率より**

$$\rho u_x|_x \Delta y \Delta z - \rho u_x|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z + \rho u_y|_y \Delta z \Delta x - \rho u_y|_{y+\Delta y} \Delta z \Delta x + \rho u_z|_z \Delta x \Delta y - \rho u_z|_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$\downarrow$　**体積** $\Delta x \Delta y \Delta z$ **で除する**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho u_x|_x - \rho u_x|_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \frac{\rho u_y|_y - \rho u_y|_{y+\Delta y}}{\Delta y} + \frac{\rho u_z|_z - \rho u_z|_{z+\Delta z}}{\Delta z}$$

$\downarrow$

教科書P. 16(3･2)は
符号が違う

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} \longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0$$

：連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}=0 \qquad (3\cdot 2)$$

$$\downarrow \qquad \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}=u_x\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$\underline{\frac{\partial \rho}{\partial t}+u_x\frac{\partial \rho}{\partial x}+u_y\frac{\partial \rho}{\partial y}+u_z\frac{\partial \rho}{\partial z}}+\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)=0$$

実質微分：流れと共に動いて観測した場合の密度の変化率

<u>非圧縮性流体</u>では密度は一定： $\frac{\partial \rho}{\partial t}=0,\ \frac{\partial \rho}{\partial x}=0,\ \frac{\partial \rho}{\partial y}=0,\ \frac{\partial \rho}{\partial z}=0$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0 \qquad (3\cdot 2)'$$

種々の座標系での連続の式:P.17**表**3・1

3・2・2**乱流場の物質収支式**

乱流場の速度： $u_x(t)=\overline{u_x}+u'_x(t),\ u_y(t)=\overline{u_y}+u'_y(t),\ u_z(t)=\overline{u_z}+u'_z(t)$

密度は変動しないものとしてこれらの速度を非圧縮流体の式(3・2)'**に代入**

$$\frac{\partial(\overline{u_x}+u'_x(t))}{\partial x}+\frac{\partial(\overline{u_y}+u'_y(t))}{\partial y}+\frac{\partial(\overline{u_z}+u'_z(t))}{\partial z}=0$$

時間平均をとる

$\overline{u'_x}=0,\ \overline{u'_y}=0,\ \overline{u'_z}=0$ **，また教科書**P.12(2・3)**の平均値の演算法則より**

$$\frac{\partial \overline{u_x}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{u_y}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{u_z}}{\partial z}=0$$

非圧縮性流体の乱流における連続の式

※教科書(3・3)**式は密度が速度と同じく変動する場合の式。**

$\rho(t)=\overline{\rho}+\rho'(t)$ **を代入することにより導かれる。**

ただし，右辺第2**項は** $\frac{\partial(\overline{\rho'}\,\overline{u'_i})}{\partial x_i}$ **ではなく** $\frac{\partial(\overline{\rho' u'_i})}{\partial x_i}$

つまり，カッコの中はそれぞれの変動値の平均の積の微分ではなく，<u>変動の積</u>の平均