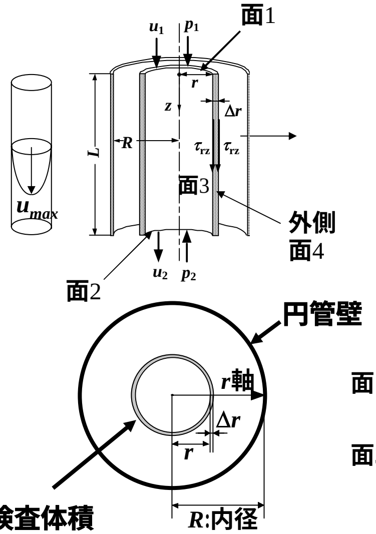
A3.円管内層流の速度分布

(教科書5･1･1では違う方法で導いている)



特徴：軸対称 ･流速は半径方向に変化

･同心円周上は等しい

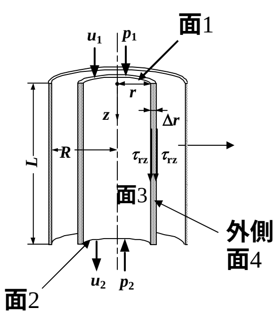
↓ 流れに沿って変化のある方向は薄く

検査体積：軸を中心とする円筒

面1, 面2：ドーナツ状 A_1, A_2 :円周×厚さ $= 2\pi r \Delta r$

面3, 面4：円筒面 $A_3, A_4 : 2\pi r L$

運動量収支



I.粘性 τA: $\left(2\pi r L\,\tau_{rz}\right)\big|_{r=r} - \left(2\pi r L\,\tau_{rz}\right)\big|_{r=r+\Delta r}$

II.流れ $\rho u^2 A$: $\rho u_1^{\,2} \cdot 2\pi r\Delta r - \rho u_2^{\,2} \cdot 2\pi r\Delta r$

III.圧力･重力： $2\pi r\Delta r \cdot (p_1 - p_2) + 2\pi r\Delta r L \cdot \rho g$

↓ $\Delta P = (p_1 - p_2) + \rho L g$

$2\pi r\Delta r \cdot \Delta P$

収支式

$$2\pi r\Delta r\left(\rho u_1^2-\rho u_2^2\right)+2\pi L\left\{\left(r\tau_{rz}\right)\big|_{r=r}-\left(r\tau_{rz}\right)\big|_{r=r+\Delta r}\right\}+2\pi r\Delta r\cdot\Delta P=0$$

$\downarrow$

流れ方向に流速は変化しない $\longrightarrow$ $\rho u_1^2-\rho u_2^2=0$

両辺を$2\pi r\Delta rL$**で除する**

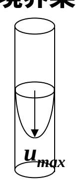
$\tau_{rz}=-\mu\dfrac{du}{dr}$　**を代入する**

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\left\{r\left(-\mu\dfrac{du}{dr}\right)\right\}\Big|_{r=r+\Delta r}-\left\{r\left(-\mu\dfrac{du}{dr}\right)\right\}\Big|_{r=r}}{\Delta r}=\frac{\Delta P}{L}$$

$$-\mu\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=\frac{\Delta P}{L}\cdot r\quad\text{(A3·1)}$$

この式を適切な境界条件下で解く

境界条件



1)$r=0$ **(管の中心)において**　$\tau_{rz}=-\mu\dfrac{du}{dr}=0$

2)$r=R$**(管の壁)において**　$u=0$

(A3·1)**式を積分**　$\dfrac{du}{dr}=-\dfrac{\Delta P}{2\mu L}\cdot r+\dfrac{C_1}{r}$　　1)**より**$C_1=0$

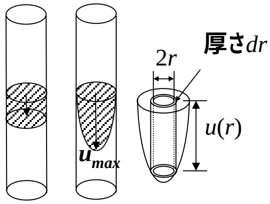
$u=-\dfrac{\Delta P}{4\mu L}r^2+C_2$　　2)**より**　$C_2=\dfrac{\Delta PR^2}{4\mu L}$

$\downarrow$

$$u=\frac{\Delta PR^2}{4\mu L}\left\{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right\}$$　**:流速分布**

$r=0\longrightarrow u_{\max}=\dfrac{\Delta PR^2}{4\mu L}$

流速分布から体積流量を求める



平坦な分布はありえない

↓

体積流量：
　つりがね状部分の体積

↓

右の薄い円筒体積：$2\pi rudr$ ⟶ r=0からR(半径)まで積分

$$Q = \int_0^R 2\pi rudr = \int_0^R 2\pi r \frac{\Delta PR^2}{4\mu L}\left\{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right\}dr = \frac{\pi\Delta PR^4}{8\mu L} \quad (5\text{・}9)\ \text{P.43}$$

：ハーゲンポアズイユ (Hagen-Poiseuille) の式
流量と圧力損失の関係を表す

管断面平均流速：$u_{\mathrm{a}} = \dfrac{Q}{A} = \dfrac{\Delta PR^2}{8\mu L} = \dfrac{u_{\max}}{2}$