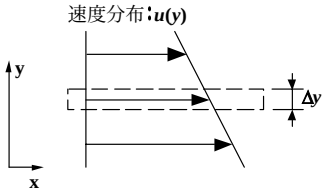
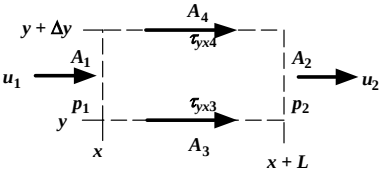
# A2.検査体積についての運動量収支と速度分布

**定常の問題を対象**




検査体積(Control Volume)
紙面垂直方向の幅：Z

**検査体積**

**・流れに沿って**
**・変化のある方向は薄く**

**検査体積の運動量が変化する3つのパターン**

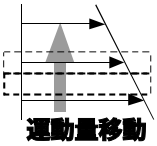
I.**粘性による出入り**

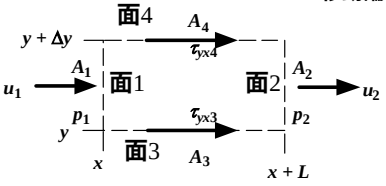
II.**流れに伴う出入り(対流)**

III.**重力・圧力による増加(場合により減少)**



## A2・1粘性による運動量の出入り




検査体積(Control Volume)
紙面垂直方向の幅：Z

**面3から入る運動量：**

$$\tau_{yx3}A_3 = \tau_{yx3}\cdot LZ$$

**ニュートン流体の流動特性** $\tau_{yx} = -\mu\dfrac{du}{dy}$ **を代入**

$$\tau_{yx3}A_3 = \left(-\mu\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=y}\right)\cdot LZ \qquad [(\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}})\mathrm{s^{-1}}]$$

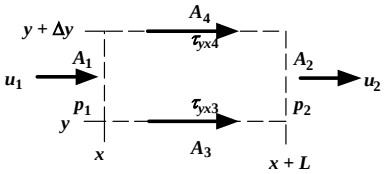
$$\tau_{yx4}A_4 = \left(-\mu\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=y+\Delta y}\right)\cdot LZ$$

**上右図面4の応力は上の層に及ぼす応力**

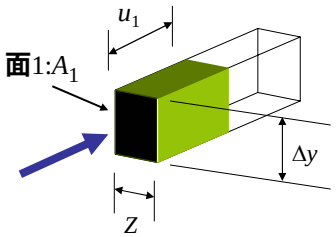
↓

**この応力の反作用により運動量が減少**

## A2・2流れ(対流)による運動量の出入




検査体積(Control Volume)
紙面垂直方向の幅:$Z$




**単位時間に**
**面1から入る流体の**

**体積**:$u_1A_1$
**質量**:$\rho u_1A_1$

↓

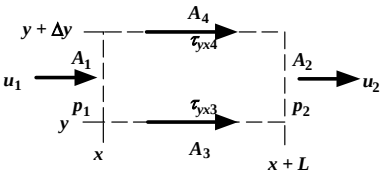
**運動量**:$\rho u_1^2A_1=\rho u_1^2Z\Delta y$
$[(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})\mathrm{s}^{-1}]$

**単位時間に**
**面2から出て行く流体の**

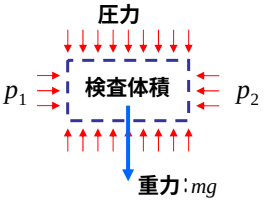
**運動量**:$\rho u_2^2A_2=\rho u_2^2Z\Delta y$



## A2・3重力・圧力による運動量の増加




検査体積(Control Volume)
紙面垂直方向の幅:$Z$




**力=運動量の時間変化**

**圧力**　・閉じた領域の外側から内側に力を及ぼす
・面3,4は流れに平行なので圧力が等しい

$p_1A_1-p_2A_2=(p_1-p_2)Z\Delta y$　$[(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})\mathrm{s}^{-1}]$

**重力**　検査体積内の流体にかかる

$mg\cos\alpha=\rho LZ\Delta yg\cos\alpha$　$[(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})\mathrm{s}^{-1}]$

$\alpha$:流れ方向と鉛直方向のなす角

## A2・4運動量収支式

**入る量－出る量＋増加する量＝変化率**

↓ **定常 ⟶ 変化率**=0

**粘性(入－出)＋対流(入－出)＋圧力･重力による増加＝0**

$$\underbrace{\left(-\mu\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=y}\right)\cdot LZ-\left(-\mu\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=y+\Delta y}\right)\cdot LZ}_{\text{粘性}}+\underbrace{\rho u_1^2 Z\Delta y-\rho u_2^2 Z\Delta y}_{\text{対流}}$$

$$+\underbrace{(p_1-p_2)Z\Delta y+\rho LZ\Delta y g\cos\alpha}_{\text{圧力･重力}}=0$$

↓ $\Delta P=(p_1-p_2)+\rho Lg\cos\alpha$

$LZ\Delta$y**で除する**

$$\frac{\left(-\mu\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=y+\Delta y}\right)-\left(-\mu\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=y}\right)}{\Delta y}=\frac{\rho({u_1}^2-{u_2}^2)}{L}+\frac{\Delta P}{L}$$



$$\frac{\left(-\mu\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=y+\Delta y}\right)-\left(-\mu\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=y}\right)}{\Delta y}=\frac{\rho({u_1}^2-{u_2}^2)}{L}+\frac{\Delta P}{L}$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(y+\Delta y)-f(y)}{\Delta y}=\frac{df}{dy}$$

$f=-\mu\dfrac{du}{dy}$ **とすると**

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\left(-\mu\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=y+\Delta y}\right)-\left(-\mu\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=y}\right)}{\Delta y}=-\mu\frac{d^2u}{dy^2}$$

$$-\mu\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{\rho({u_1}^2-{u_2}^2)}{L}+\frac{\Delta P}{L}$$

↓ **適切な境界条件のもとに解く**

**流速分布**$u(y)$