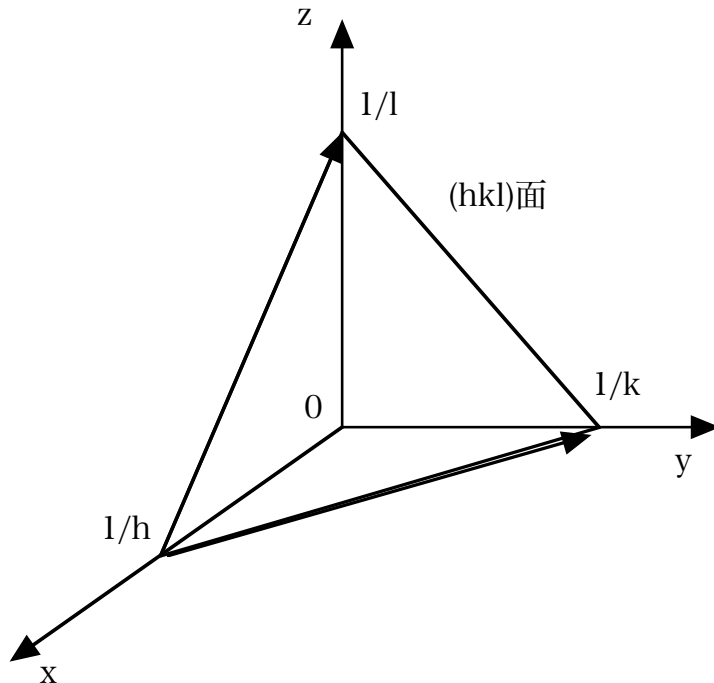


[hkl]方向が(hkl)面の法線方向であること

山田 明

立方格子として、x, y, z方向の並進ベクトルを $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ とする。すると、[hkl]方向は、



$h\vec{a} + k\vec{b} + l\vec{c}$ と表される。このベクトルが、(hkl)面と垂直の関係にあることを示せばよい。このためには、(hkl)面上にある二つの独立なベクトルが、このベクトルと直交していることを示せばよい。

二つのベクトルは、適当に選べるが、たとえば左図のxy平面内のベクトル($\vec{A}$)とxz平面内のベクトル($\vec{B}$)が、(hkl)面上の二つの独立なベクトルとなっている。 $\vec{A}$ ベクトルは $\vec{A} = \frac{1}{k}\vec{b} - \frac{1}{h}\vec{a}$ と、 $\vec{B}$ ベクトルは $\vec{B} = \frac{1}{l}\vec{c} - \frac{1}{h}\vec{a}$ となる。したがって、それぞれのベクトルと $h\vec{a} + k\vec{b} + l\vec{c}$ との内積を求めると、

$$\begin{aligned} (h\vec{a} + k\vec{b} + l\vec{c}) \cdot \vec{A} &= (h\vec{a} + k\vec{b} + l\vec{c}) \cdot \left(\frac{1}{k}\vec{b} - \frac{1}{h}\vec{a} \right) \\ &= \frac{h}{k}\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - \frac{k}{h}\vec{b} \cdot \vec{a} + \frac{l}{k}\vec{c} \cdot \vec{b} - \frac{l}{h}\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= -d^2 + d^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

同様に、

$$(h\vec{a} + k\vec{b} + l\vec{c}) \cdot \vec{B} = 0$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{a} &= \vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{c} = d^2 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \end{aligned}$$

という関係を用いた。dは格子定数である。

以上より、立方格子の場合、[hkl]は(hkl)面の法線方向であることが示された。