

第 11 回

内容

- ・ 電磁波の伝搬
真空中の電磁波、平行線路間の電磁波
- ・ 電磁波の運ぶエネルギー
ポインティングベクトル
- ・ 電磁波の運動量、圧力

教科書の第 15 章中ほどに相当

電磁波の伝搬**真空中の平面波**

前回、次の 4 つの基本方程式から、真空中で電流も電荷もない場合について電磁波の存在を導いた。

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho \\ \operatorname{curl} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \\ \operatorname{curl} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

すなわち、 $\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$ 、および $\rho = 0$ と $\boldsymbol{i} = 0$ を代入して

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0 \\ \operatorname{curl} \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0 \\ \operatorname{curl} \boldsymbol{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

から、ベクトル公式を利用して真空中の電界と磁界の波動が、速度 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ （光速）で進むことを導いた。しかし、まだ、電磁波は横波か縦波か、電界と磁界の振幅の間の関係、電界と磁界の位相の関係などは明らかにしなかった。これらを知るには、たとえば、前回得られた解のうちの電界 $\boldsymbol{E}$ の式を、上の 4 つの式の 1 番目と 2 番目に代入して計算してもよい。しかし、ここでは基本方程式を、今度は成分ごとにきちんと書き下して解くことにより、これらを示すことにする。計算式がたくさん出てきて大変であるが、各成分の関係は直接得られる。

上の基本方程式（真空中で電流も電荷もない場合）を直角座標の各成分で書くと

$$\frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z = 0 \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} H_x \\ \frac{\partial}{\partial z} E_x - \frac{\partial}{\partial x} E_z = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} H_y \\ \frac{\partial}{\partial x} E_y - \frac{\partial}{\partial y} E_x = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} H_z \end{array} \right\} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} H_x + \frac{\partial}{\partial y} H_y + \frac{\partial}{\partial z} H_z = 0 \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} H_z - \frac{\partial}{\partial z} H_y &= \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_x \\ \frac{\partial}{\partial z} H_x - \frac{\partial}{\partial x} H_z &= \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_y \\ \frac{\partial}{\partial x} H_y - \frac{\partial}{\partial y} H_x &= \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_z \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで、次の設定をする。

まず、前回と同様に xy 面内で $\mathbf{E}$ と $\mathbf{H}$ が一様の場合だけ扱う。つまり

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0 \quad \text{および} \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

さらに、 $\mathbf{E}$ の 3 つの成分のうち、 E_x だけが 0 でないとする。つまり

$$E_y = 0 \quad \text{および} \quad E_z = 0 \quad (6)$$

磁界 $\mathbf{H}$ の成分については最初は何も指定しない。

これらの設定により、上の式の中のたくさんの項が 0 になって消去できることがわかる (各自確かめよ)。

この状況で解を求めよう。

まず、(1)は左辺が 0 になって自動的に成り立つ。

(2)の一番目の式から

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = 0$$

が得られ、したがって H_x = 時間的に一定 となる。ところが今は空間を伝搬する波動に注目したいので、これは解であっても興味がない。空間を伝搬する波動の解はない。したがって

$$H_x = 0 \quad (7)$$

(2)の 2 番目の式からは

$$\frac{\partial}{\partial z} E_x = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} H_y \quad (8)$$

(2)の 3 番目の式からは、 $\frac{\partial H_z}{\partial t} = 0$ が得られ、 H_z = 時間的に一定 となるが、 H_x と同様に

$$H_z = 0 \quad (9)$$

(3)は(5)(6)(9)により、やはり自動的に 0 になる。

(4)の 1 番目の式から

$$-\frac{\partial}{\partial z} H_y = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_x \quad (10)$$

(4)の 2 番目と 3 番目は(5)(6)(7)(9)により自動的に 0 になる。

これらをまとめると次のようになる。

$$0 \text{ でない成分は } E_x \text{ と } H_y \text{ のみ、つまり } \begin{cases} E_y = 0 \\ E_z = 0 \end{cases} \quad \text{および} \quad \begin{cases} H_x = 0 \\ H_z = 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$0 \text{ でない成分に対して } \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} E_x = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} H_y \\ \frac{\partial}{\partial z} H_y = -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_x \end{cases} \quad (12)$$

すなわち、最初 8 個あった方程式はここまで簡単になった。

次に、(12)から

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \quad (13)$$

これは前回説明した波動方程式にほかならない。この解は、前回説明したように、 z の正負の方向に進む波動である。正方向に進む項だけを書くと

$$E_x(z, t) = E_0 \sin[k(z - ct)] = E_0 \sin(kz - \omega t) \quad (14)$$

ただし、 $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ (真空中の光速)、これも前回説明した。

(14)を(12)の 2 番目の式に代入すると

$$H_y(z, t) = -\int \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} dz = c \varepsilon_0 E_0 \sin[k(z - ct)] \equiv H_0 \sin(kz - \omega t) \quad (15)$$

以上により、真空中の電磁波に対して次のことが明らかになった。

- ・ 電界と磁界の波動が速度 (光速) $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ で真空中を伝わる (前回すでに得られた)。
- ・ 電磁波は横波である。
くわしくいうと、電界ベクトル $\mathbf{E}$ 、磁界ベクトル $\mathbf{H}$ 、および電磁波の進行方向はすべて互いに直交する。電磁波の進む方向はベクトル $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ の方向である (このことは後で電磁波の運ぶエネルギーを解析するときに再び出てくる)。
- ・ 電界の振幅 E_0 と磁界の振幅 H_0 の間には次の関係式が成り立つ

$$H_0 = c \varepsilon_0 E_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

- ・ 電界の波動と磁界の波動の位相は同じである。

ここで説明した波動は、進行方向(z 方向)に垂直な面内(xy 面内)で電界と磁界が一樣 (等位相) となっている。このような波を平面波とよぶ。

平面波の分布の概略を下図に示した。電界の方向(この場合は x 方向)を、電磁波の偏波方向または偏光方向とよぶ。また、電界と磁界は同じ形 (同位相) である。前回、電磁波の説明の最初のところで、電界と磁界の伝搬の概略図を示したが、その図はあくまで現象をイメージさせるだけのもので、今ここで得られた結論からわかるように厳密に言うとは正確でない。

波数 k 、波長 λ 、角周波数 ω 、周波数 f 、および速度 c とそれらの間の関係については前回説明した。また、周波数と波長が広い範囲にわたっているのを、補助単位が使われていることも前回説明した。

電界の振幅 E_0 と磁界の振幅 H_0 の比について、もう少し説明を追加する。この比の単位は

$$\frac{E_0 [\text{V/m}]}{H_0 [\text{A/m}]} = \frac{[\text{V}]}{[\text{A}]} = [\Omega]$$

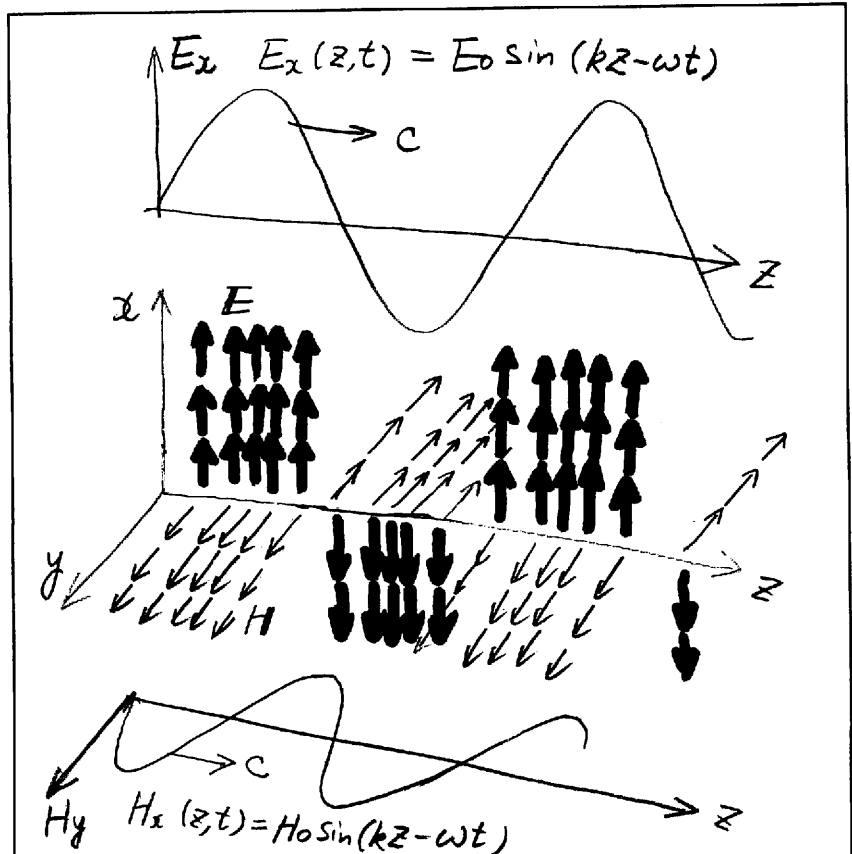
すなわち、抵抗の単位になる。

具体的な数値は

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{H_0} &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = c\mu_0 \\ &= 120\pi [\Omega] = 377 [\Omega] \end{aligned}$$

この比のことを界インピーダンス（または電磁波に対する空間の特性インピーダンス）とよぶ。

この比はアンテナや伝送線路、電磁波の伝搬などの理論では重要なパラメータとしてよく出てくる。



(余談) 以上で電磁波の存在を示す解析結果が得られた。この発端となったのは、これまでの基本方程式に、ただ一項の変位電流が付け加わったことである。マクスウェルは、それまでに得られていた電磁気現象の基本方程式を整理し、さらにこの変位電流の項を付け加えて、その結果電磁波の存在を理論的に予測したわけであるが、理論（というより直感に近いかもしれない）的に付け加えられたものであるだけに、電磁波の存在が実験的に証明されるまで、必ずしも誰もが認めたものではなかったらしい。電磁気現象と光が関係あるということさえ、当時は非常に飛躍的な発想だったようである。この方程式からは電磁波の存在や、光が電磁波であることによる事柄（光速、反射、屈折、屈折率と誘電率の関係など）、光の圧力などが予言されており、実験によりこれらが証明されていくにつれて、方程式も次第に認められていったようである。電磁波の存在を実験により証明したのはヘルツ（カールスルーエ大学／ドイツ、1886）である。これは当時、大きなニュースとなって世界に広まった。しかし、ヘルツ自身はこれを純粹に物理学的研究としてとらえ、通信に使うなど一般に広まるとはまったく考えていなかったらしい。

任意の方向に進む平面波（補足的）

上の解析では z 方向に進む波だけについて扱ったが、3次元空間の任意の方向に進む波は次式のように表わされる。

$$E(x, y, z, t) \equiv E(\mathbf{r}, t) = E_0 \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \equiv E_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

この式はベクトル $\mathbf{k} (k_x, k_y, k_z)$ の方向へ進む波動を表わしている。 $\mathbf{r}$ は座標 (x, y, z) を表わすベクトルであり、前述の解析で kz となっていたところがスカラー積 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ になっている。ベクトル $\mathbf{k}$ は波数ベクトル

とよばれ、方向は電磁波の進む方向、大きさは $|\mathbf{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$ となる。

磁界に対しても同様に $\mathbf{H}(x, y, z, t) \equiv \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = H_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ であり、 $\left| \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{H}} \right| = \left| \frac{E_0}{H_0} \right| = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ となる。

また、 $\mathbf{E}_0$ 、 $\mathbf{H}_0$ 、 $\mathbf{k}$ はすべて互いに直行している。

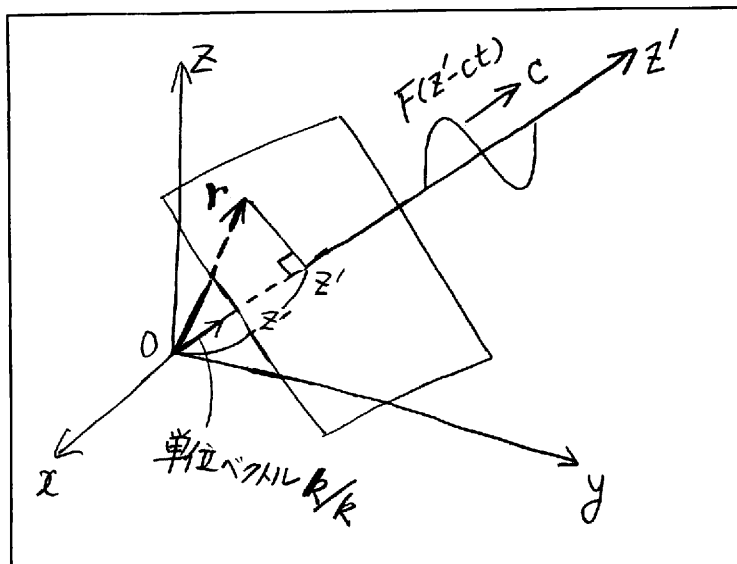
上式の導出

前述の z 方向に進む波の式で座標を回転しても得られるが、次のようにしても求められる。

右図のようにベクトル $\mathbf{k}$ の方向に沿って z' 軸をとり、軸上で原点から z' の位置において、この軸に垂直な平面を考える。この面上の点を表すベクトル $\mathbf{r}$ は次の式を満たす。

$$\mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{k}}{k} = z'$$

つまり、 $\mathbf{r}$ と単位ベクトル $\mathbf{k}/k$ のスカラー積 (= $\mathbf{r}$ のうちの $\mathbf{k}$ 方向成分) がつねに z' ということである。したがって $\mathbf{r} \cdot \mathbf{k} = k z'$ となるので、 z' 方向へ速度 c で進む平面波は $F(z' - ct) = A \sin k(z' - ct) = A \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ 。振幅 A をベクトルにすれば上で示した電界と磁界の波の形が得られる。

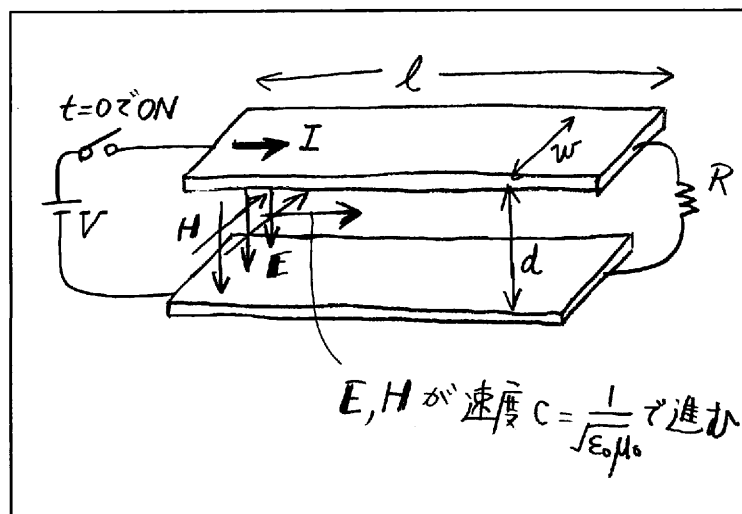


平行線路間の電磁波

以上は何もない空間を伝わる電磁波の説明であったが、今度は右図のように2つの平行な導体板の間を伝わる電磁波について説明する。

右図のように長さ ℓ の平行導体板の両端に電源電圧 V と負荷抵抗 R をつなぎ、スイッチを入れたら、もちろん抵抗に電流が流れるわけであるが、このとき、スイッチを入れてから抵抗に電流が流れるまでに時間 $t = \ell/c$ を要する。ここで $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ 、すなわち真空中の光速である。

これは、平行導体板を電源から抵抗に向かって電流が流れていくのと同時に、導体の間を電界と磁界が光速度で伝わっていき、それが抵抗に達するまでに時間がかかることを意味している。回路だけで考えると電圧と電流だけの議論になるが、このように、実際は電磁波の伝搬が伴っているのである。



導体間を電界と磁界が光速度で伝わっていることを解析で示してみよう。

スイッチを入れたら導体間を電磁界が抵抗に向かって伝搬していく。下図(a)はその途中を横から見た図である。電磁界の進行方向を z 方向とし、原点から z の位置まで電流と電磁界が進行しているとし、ここまでの電磁界は一様とする。断面での電磁界分布を示したのが下図(b)である。図のように、電磁界はほとんど導体間に集中しており、他の場所ではこれに比べて小さいので無視できる。

まず、右図(a)に示したループ C1 に沿ってファラデーの法則を適用すると

$$\oint_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

ループ内で電磁界が一様としたので

$$Ed = -\frac{d}{dt}(\mu_0 H z d)$$

次に、右図(c)に示すように、導体板の間の空間で、導体板の面に平行なループ C2 に沿ってアンペアの法則(拡張)を適用すると

$$\oint_{C_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{d}{dt} \iint_{S_2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

ループ内で電磁界が一様としたので

$$-Hw = \frac{d}{dt}(\epsilon_0 E zw)$$

まとめて整理すると

$$\begin{cases} Ed = -\frac{d}{dt}(\mu_0 H z d) = -\mu_0 H d \frac{dz}{dt} \\ Hw = -\frac{d}{dt}(\epsilon_0 E zw) = -\epsilon_0 E w \frac{dz}{dt} \end{cases}$$

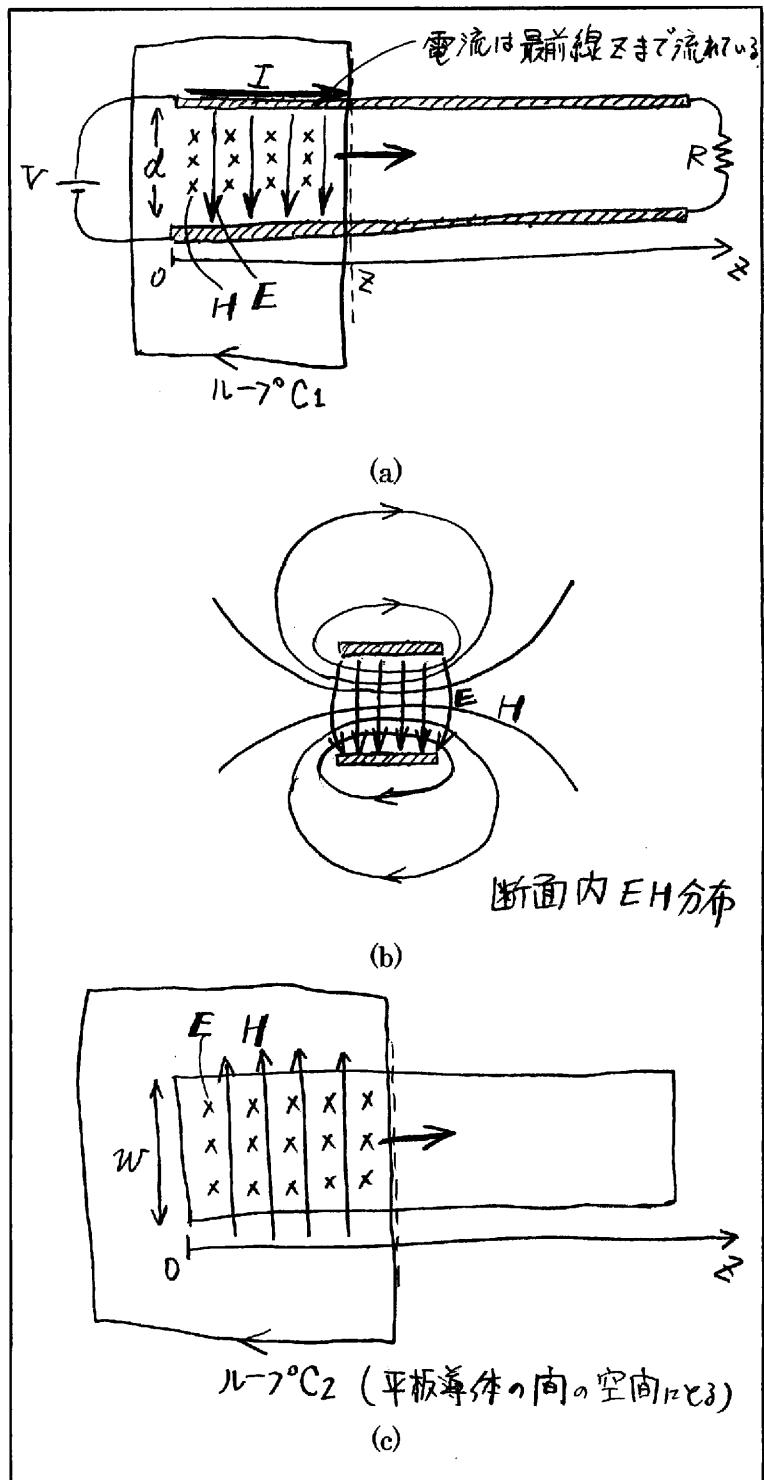
この2つの式から

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \epsilon_0 \mu_0 = 1$$

すなわち

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

したがって、電界 E と磁界 H の最前線の位置 z が光速で進行しているという結果が得られた。



以上の解析では、平行平板の導体を例にとったが、どのような形状の導体の対であっても（たとえば2つの円柱導体、同軸など、ともかく任意の断面形状）、その間の空間を光速で電磁界が進み、それににかかる時間がたったあと抵抗に電流電圧が生じる。

(補足 1) 電荷は光速で進んでいるのか？

次のような疑問を持つ人がいるかもしれない。電界は2つの導体の向かい合う表面に蓄えられた電荷から発生しているはずであるから、電界の最前線が光速で進んでいるということは、この電荷も光速で導体の表面を電源から抵抗に向かって進んでいるのだろうか。（この疑問に対する答えは次ページに述べるが各自考えてみるとよい。）

電荷が光速で進むということはない。光速で移動しているのは電界、磁界、電流の最前線の位置だけである。電荷は導体全体にはじめから一様に分布しているが、電磁界の最前線より先の部分ではほとんど静止(厳密には熱運動しているが無視する)していて、最前線が来ると動き始める。したがって、電荷が光速で移動しているのではなく、電荷の動き始める位置が光速で移動している。最前線より後ろの部分では、電荷も同じ方向に走ってはいるが光速よりずっと遅い。

(補足 2) オームの法則に従わない？

次のような疑問もある。上図(a)と(b)を参照すると $E = V/d$ および $H = I/w$ であるが、上に示した解析により $\sqrt{\epsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H$ となるので、電流と電圧の比は

$$\frac{V}{I} = \frac{Ed}{Hw} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{d}{w}$$

となって $V/I \neq R$ となっている。電流と電圧が抵抗にまだ到達していないのだから当然とはいえ、オームの法則は成り立たないことになり、矛盾は生じないのだろうか。

この電流と電圧は、この関係のまま抵抗に到達するまで進むが、抵抗に達したとき電流の一部が反射して再び電源のほうへ戻っていき、抵抗端では常に電流電圧比が R となるように電流と電圧が変化する。(具体的な電流と電圧の値にはここでは触れない。伝送線路という分野の理論解析になる。) 反射して電源に向かった電流成分はふたたび電源端で反射して戻ってくる。このようにして何度も反射を繰り返し、十分時間がたった後(といっても導体が短ければ短時間である)、直流の回路の関係式 $V/I = R$ に落ち着くのである。

なお、もし上に示した電流と電圧の比の式がたまたま R と同じ数値をもつならば、抵抗に達したとき反射は起こらず、すべての電流がそのまま抵抗に流れる。このような状況をインピーダンス整合(マッチング)がとれているという。

回路との対応

以上の解析では導体間の電磁界に着目したが、もし電圧と電流に着目するならば、たとえば右図(a)の平行導体の回路は、図(b)の回路図で表わすことができ、これに対して回路解析を行えばよい。図(b)の L と C は2導体の単位長さあたりの静電容量と自己インダクタンスである。

接続した電源が交流 $V(t) = V_0 \cos \omega t = \text{Re}[V_0 e^{j\omega t}]$ であれば複素数表示を用いた交流理論で解析できる。詳細は省略するが、この解析の結果、導体上の各点の電圧と電流に対して

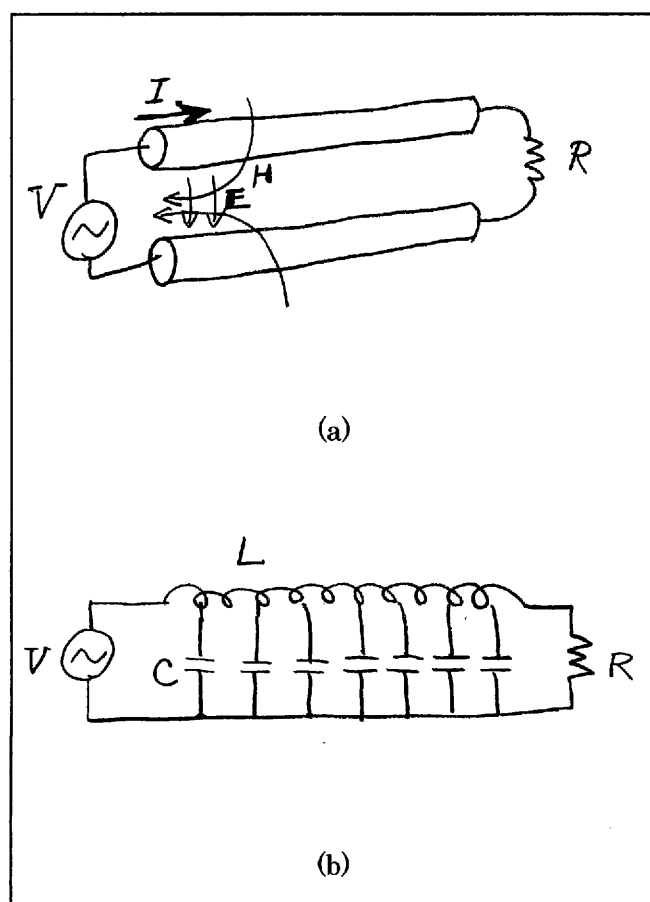
$$V(z, t) = \text{Re}[V_0 e^{-jkz} e^{j\omega t}] = V_0 \cos(kz - \omega t)$$

$$I(z, t) = I_0 \cos(kz - \omega t)$$

および、 $k = \omega\sqrt{LC}$ が得られる。

すなわち、回路解析によっても電圧と電流が波動で伝わることがわかり、その速度が $v = \omega/k = 1/\sqrt{LC}$ であるという結果が得られるのである。ところが、この速度に対して、 $1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ が常に成り立ち、その結果、電圧と電流は光速で伝わるということがわかり、導体間の電磁界に対する結果と一致するのである。

$1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ という関係式は電磁界の基本方程式を用いて一般的に示すことができるが、それは教科書を参照するとして、以下に一例だけ示す。



例 平行 2 導体が半径 a の円柱で、中心間隔が d のとき、単位長さあたりの自己インダクタンスと静電容量は（演習で計算したと思う）

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{a} \quad [\text{H/m}] \quad C = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln \frac{d}{a}} \quad [\text{F/m}]$$

となって、確かに $1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ が成り立っていることがわかる。その他の形状の導体（たとえば同軸線路）でも確かめることができる（各自行え）。

なお、上図(b)の回路図中の L と C は、通常の回路のような 2 点間をつなぐ回路素子ではなく、「単位長さあたり」という言い方で与えたように、回路中に分布して存在している。このような回路素子を分布定数、回路を分布定数回路とよぶ。また、これに対して、通常の回路素子と回路を集中定数および集中定数回路とよぶ。

電磁波の運ぶエネルギー

これまで述べてきた電磁波がエネルギーを運ぶ（あるいは、電磁波はエネルギーの流れである、といってもよい）ことを示し、この流れの大きさを求めてみる。

右図のように電界 $\mathbf{E}$ と磁界 $\mathbf{H}$ が存在する領域を V 、その表面を S とすると、その中に含まれる電気エネルギーと磁気エネルギーの合計は

$$W = \iiint_V \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right) dv$$

いま、このエネルギーが時間的に変動しているとする
と、単位時間当たりの変化の割合は

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \iiint_V \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \right) dv$$

この積分の中の第 1 項は次のように変形できる。

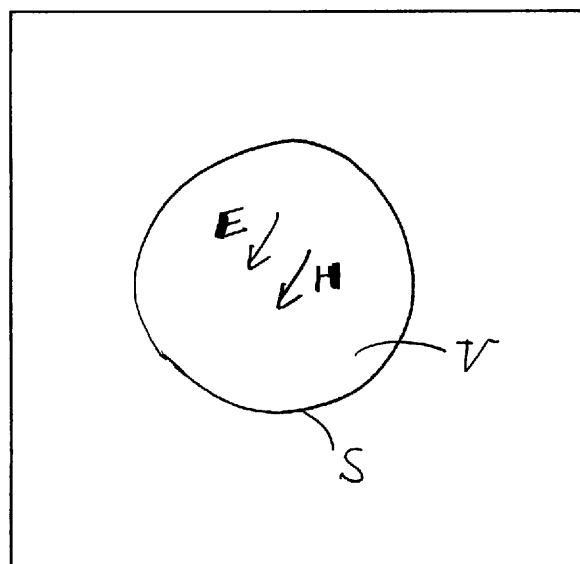
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) &= \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}^2) = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ &= \mathbf{E} \cdot (\text{curl} \mathbf{H} - \mathbf{i}) = \mathbf{E} \cdot \text{curl} \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{i} \end{aligned}$$

ただし、基本方程式のひとつ $\text{curl} \mathbf{H} = \mathbf{i} + \partial \mathbf{D} / \partial t$ を用いた。同様に積分の中の第 2 項に対しても

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B}^2) = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{H} \cdot (-\text{curl} \mathbf{E}) = -\mathbf{H} \cdot \text{curl} \mathbf{E}$$

ただし、基本方程式のひとつ $\text{curl} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ を用いた。

これらの変形により、単位時間当たりのエネルギー変化は



$$\frac{\partial W}{\partial t} = \iiint_V (\underbrace{\mathbf{E} \cdot \text{curl} \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \text{curl} \mathbf{E}}_{\text{ベクトルの公式により } -\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \text{ になる}} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{i}) dv$$

$$= - \underbrace{\iiint_V \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dv}_{\text{ベクトル公式(ガウスの定理)}} - \iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{i} dv$$

$$= - \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} - \iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{i} dv$$

結局、領域 V の中の電気磁気エネルギーの変化に対して、次の式が得られる。

$$-\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\iiint_V \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right) dv}_{\text{電気磁気エネルギーの減少}} = \underbrace{\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}}_{\text{面から単位時間あたり出ていくエネルギー}} + \underbrace{\iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{i} dv}_{\text{電流によるエネルギーの消費(ジュール熱)}}$$

この式からわかるように、

$$\mathbf{S}_p = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

というベクトルは単位面積を通過する単位時間あたりのエネルギー（つまり、単位面積を通過する電力）の流れを表わしている（すなわち、ベクトルの方向が流れの方向、大きさが単位面積を通過する電力）。このベクトルを、この関係式の発見者の名をとって、ポインティングベクトルとよぶ。

例 1 真空中の平面波

電界と磁界は直交しており、 $E_x(z, t) = E_0 \sin(kz - \omega t)$ および $H_y(z, t) = H_0 \sin(kz - \omega t)$ から

$$S_p = E_x H_y = E_0 H_0 \sin^2(kz - \omega t)$$

電磁波の 1 周期 $T = 2\pi / \omega$ で平均すると

$$\bar{S}_p = \frac{1}{T} \int_0^T S_p dt = \frac{1}{2} E_0 H_0$$

また、 $\sqrt{\epsilon_0} E_x = \sqrt{\mu_0} H_y$ の関係を用いると次式が得られる。

$$S_p = E_x H_y = c \epsilon_0 E_x^2 = c \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E_x^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H_y^2 \right)$$

この式の右辺は、長さ c で単位面積を持つ領域内の電気磁気エネルギーを表わしている。電磁波が速度 c で単位面積を単位時間のあいだ通過するということは、長さ c のこの領域が通過することと同じであるから、これがポインティングベクトルの大きさになるということは納得できる。

例 2 平行線路

やはり電界と磁界は直交しており、 $E = V/d$ および $H = I/w$ であるから

$$S_p = EH = \frac{VI}{wd} = \frac{\text{消費電力}}{\text{断面積}}$$

となって、ポインティングベクトルが単位面積あたりの電力の流れであることが納得できる。

これは平行平板の場合であるが、任意の形状に対しても一般的に

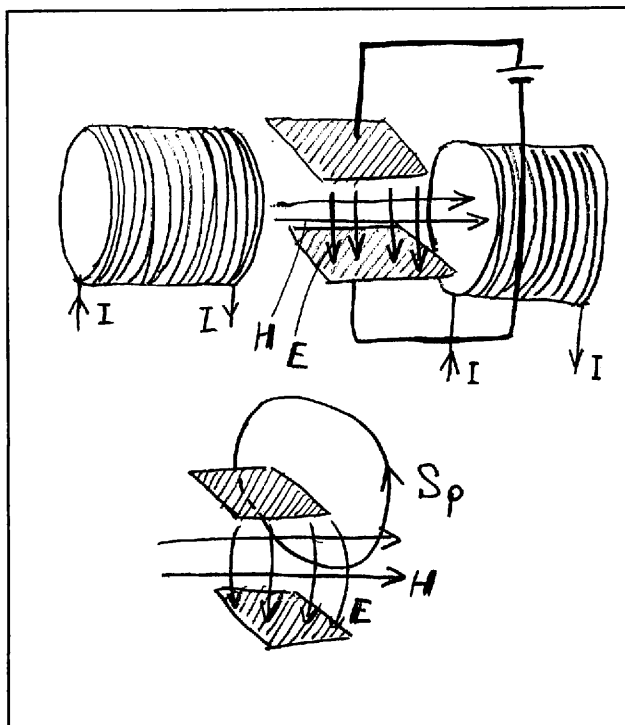
$$VI = \iint_S \mathbf{S}_p \cdot d\mathbf{S}$$

平行平板以外の例を演習で行う予定である。

(補足) 次のような場合はエネルギーの流れがあるのか？

右図のように直流の電圧と電流で時間的に一定の電界 $\mathbf{E}$ と磁界 $\mathbf{H}$ を別々に作って、直交するように配置する。このとき、 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ というベクトルは確かに存在するが、互いに無関係の電磁界である。それでも $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ は電力の流れを表わしているのだろうか。

確かに $\mathbf{S}_p = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ という量は存在するが、この場合は必ず $\text{div} \mathbf{S}_p = 0$ (いいかえると閉曲面で積分すると必ず 0) となって、この $\mathbf{S}_p$ は外に取り出せない (エネルギーが流れているかどうか確かめようがない)。このようにポインティングベクトルとしては、発散するものしか意味がない。



電磁波の運動量、圧力

電磁波はエネルギーを運ぶとともに運動量も持っている。電磁波の持つ単位体積あたりの運動量は

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{S}_p}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

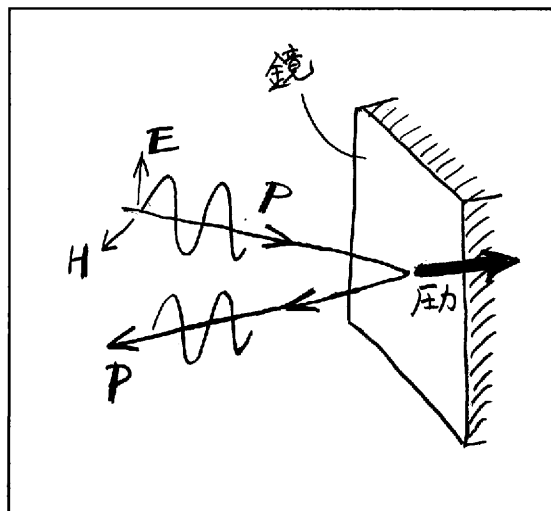
この式の導出はやや複雑なので省略する。導出の概略としては、電磁波の中に存在する点電荷に対して、ローレンツ力がはたらくことを考慮して運動方程式を作り、これを電磁界の基本方程式を用いて変形すると、電荷と電磁波の間で運動量が保存されるという式が得られ、その式から電磁波が上式の形の運動量 (単位体積あたり) を持っていることがわかるのである。

電磁波が運動量をもっていることから、物体に照射されるとその物体は圧力を受ける。右図のように電磁波を 100% 反射する鏡に対して照射された電磁波は、完全に方向を反転するので、照射による単位時間当たりの運動量の変化は

$$\text{運動量の変化} / \text{単位時間} = 2PcA$$

ただし A は電磁波の照射された面の面積であり、 cA が単位時間に鏡に照射された電磁波の体積である。この式から

$$\text{圧力} = 2Pc = \frac{2}{c} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$



この圧力は電磁波の放射圧とよばれ、実際に存在することはレベデフによって実験で証明された(1899)。また、彗星の尾が太陽と反対方向に向くのもこの圧力による。