第 10 回

内容

- **変位電流**
- **マクスウェルの方程式**
  基本方程式の総まとめ
- **電磁波**
  波動方程式、光速

教科書の第 15 章前半に相当

変位電流

基本方程式の不完全な部分

これまで出てきた電磁界の基本方程式をまとめてみると（前半に関するものも含める）、

$$\begin{cases} \mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho & \text{ガウスの法則} \\ \mathrm{curl}\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} & \text{ファラデーの法則} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 & \text{単極磁化はない} \\ \mathrm{curl}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} & \text{アンペアの法則} \end{cases}$$

今回は、これらの方程式に不完全な部分があることを示し、修正した基本方程式を与えて総まとめを行う。そして、このようにして得られた完全な基本方程式から、電磁波というものが予測できることを示す。

上の基本方程式が完全でないと思われるのは次の点である。
これらの方程式のうちのアンペアの法則 $\mathrm{curl}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}$ に対して、両辺の発散を計算すると
$\mathrm{div}(\mathrm{curl}\boldsymbol{H}) = \mathrm{div}\,\boldsymbol{i}$ であるが、この左辺は数学的に必ず 0 になるから、その結果 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{i} = 0$ が得られる。
つまり、アンペアの法則が成り立つなら電流密度の発散は必ず 0 ということである。しかし、これは
電荷保存の式（あるいは電流連続の式とよばれる、電流の定義そのもの）$\mathrm{div}\,\boldsymbol{i} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$ と矛盾する。

拡張されたアンペアの法則

上に述べたような不完全な部分は、アンペアの法則を次のように書き換えることによって完全にすることができる。

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

すなわち、右辺に電流密度の他に、新しく電束密度の時間微分の項を付け加えるのである。
この式に対して両辺の発散を計算すると

$$\mathrm{div}(\mathrm{curl}\boldsymbol{H}) = \mathrm{div}\left(\boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) = \mathrm{div}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\boldsymbol{D})$$

左辺は数学的に常に 0 であり、右辺の第 2 項に対してガウスの法則 $\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho$ を使うと

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

したがって、電流連続の式と矛盾しない。このことから、$\partial \boldsymbol{D}/\partial t$ を追加した上式が正しい式と考えるべき

である。この項$\partial \boldsymbol{D}/\partial t$は変位電流密度とよばれ(電流密度の次元を持っていることは各自確かめること)、この修正を行った方程式は拡張されたアンペアの方程式とよばれる。

変位電流密度の項を付け加えたのはマクスウェルである(1861)。これまでの基本方程式はいずれも実験結果をもとにして得られたものであるが、この項だけはマックスウェルが理論的な考察により付け加えた。しかし、上に述べたようなあっさりした考察だけで付け加えたのではない。この方程式にいたるまでには、非常に多くの、実験結果に対する直感や抽象的な思考があったようである。今日の目で見るとこれらはきわめて複雑で抽象的である。たとえば、磁力線の存在する空間や物質は、磁力線のまわりを回転する円筒(エーテルという物質がすべての空間に存在し、このような動きをすると考えたらしい)で埋め尽くされ、円筒の間に潤滑剤のような微粒子(今日の目では電子に近い)が満たされているという力学的な運動モデルにより、電磁気現象が説明されたりした。これらの考察の末に、電流が流れないところでも電気力線の瞬時変化が、(物質中で分極(電荷の変位)を起こして伝わっていくようなイメージで)空間を伝わり電流の役目をするという考えから、変位電流にたどり着いたようである。最終的には抽象的な力学的モデルはすべて取り払われて電磁気的な式だけで議論する形に整理され、現在の形の原型ができあがったのであるが、これらの歴史的な話はここでは省略したい。

変位電流によって生じる現象

上述の拡張されたアンペアの法則を積分形で書くと

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{\ell} = I + \iint_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}$$

右辺の第1項は真の電流、第2項は変位電流である。この式を用いて、変位電流を付け加えたことにより新しく出現すると予想される現象について述べる。

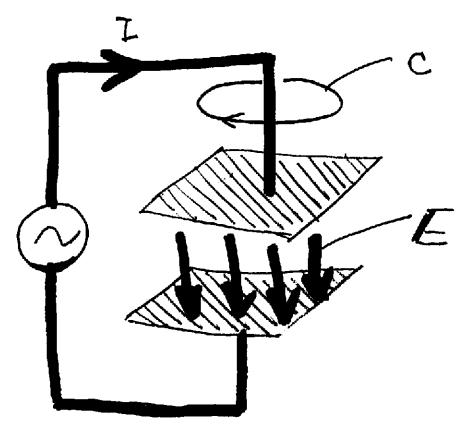
右図(a)のように交流電源が平板コンデンサにつながれた回路を考える。コンデンサの充放電により、導線には電流が流れている。平板コンデンサの電極間には、電極に蓄えられる電荷(これは充放電により時間的に変動しているが)により電界が発生している。もちろんここには電流は流れていない。

さて、右図(a)のように導線のまわりを一周する積分路を考えると、ここには電気力線はないので

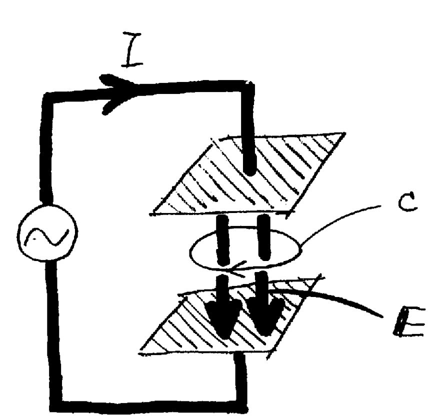
$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{\ell} = I$$

これはいままでのアンペアの法則と何の変わりもない。ただ、電流が交流であるため、発生する磁界も交流であるという点が異なるだけである。

次に右図(b)のように電極間の空間を一周する積分路を考える。この積分路の作る平らな面を考えると、これを貫く電流は0なので、もし変位電流の項を付け加えなければ$\boldsymbol{H}=0$ということになる。ところがこの空間には時間変化する電界$\boldsymbol{E}(t)$が、したがって電束密度$\boldsymbol{D}(t)=\varepsilon_0\boldsymbol{E}(t)$が存在するので、上式を適用すると



(a)



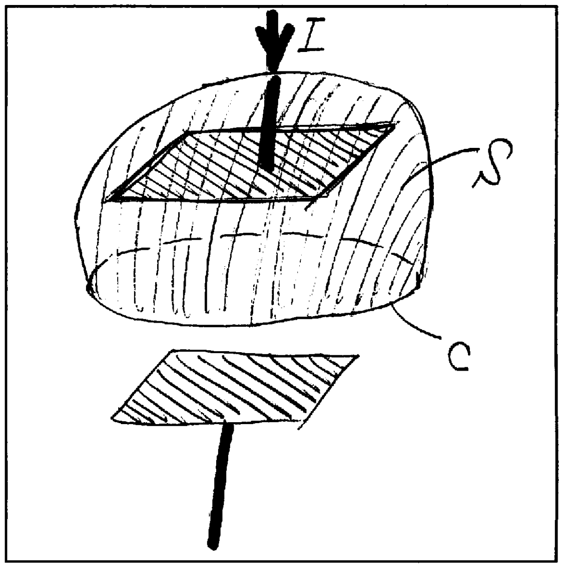
(b)

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \iint_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}$$

となって$\boldsymbol{H}\neq 0$となる。すなわち、真電流の存在しない電極間の空間にも磁界は存在することになる。

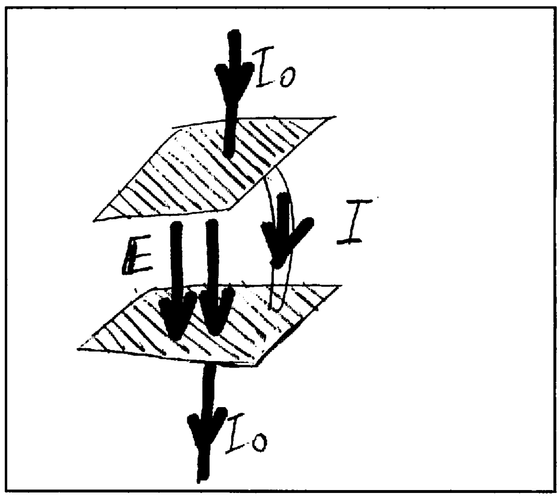
このように、変位電流の項を付け加えることで、電流連続からの要請ばかりでなく、真の電流がないところでも、電気力線の時間的変動が磁界の発生源になり得るということを新たに予測したことになる。理論的に付け加えられた項なので、正しいかどうか実験的検証が必要である。これは、最終的に電磁波の存在という形で検証されることになる。これについてはあとで述べる。

実は、以下に示すように、変位電流の項がないとむしろ矛盾が生じるともいえる。以前、アンペアの法則を説明したとき、周回積分路の作る面（電流が貫く面）は平面に限らなくてもよいということを説明した。これを上の場合に適用して、電極間にある周回積分路の作る面を、右図のように膨らんだ曲面として導線が貫くようにすると、この場合は真の電流があるので、いままでのまま$\boldsymbol{H}\neq 0$となる。もし真の電流しか考えないとすると、このように周回積分路が同じでも面のとり方によって異なった結果になっておかしなことになるが、変位電流の項を付け加えることによって、この矛盾が解消される。すなわち、電極間にとった周回積分路は、真の電流が貫く面を考えても、変位電流が貫く面を考えても、どちらでも同じ結果になる（このことは、電流連続の式を使って、すぐに示すことができる。各自に任せる）。このように、変位電流の項を付け加えることによって、むしろアンペアの法則がどんな場合でも適用できるようになったと考えることもできる。



右図のように変位電流$\partial\boldsymbol{D}/\partial t$と真の電流$I$が同時に並列に存在するときは

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{\ell} = I + \iint_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}$$



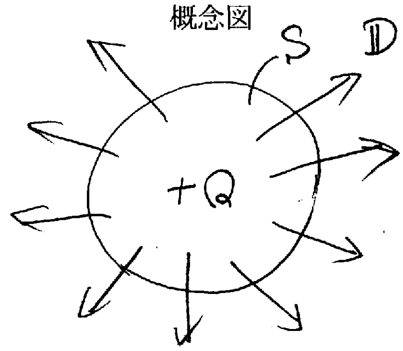
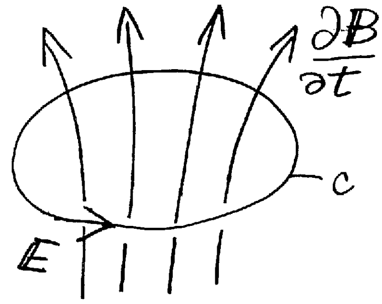
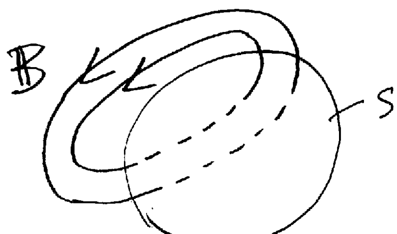
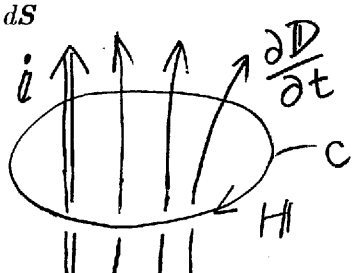
なお、コンデンサの場合は、変位電流は次のように電極に蓄えられた電荷の時間変化そのものに等しい。

$$\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{d}{dt}\oiint \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{dQ}{dt}$$

つまり、導線を流れてきた電荷が電極に蓄積するわけであるが、電流はそこでなくならずに変位電流となって電極の反対側に続いていると考えていることになる。このように、部分的に真の電流が存在する場合は、それが途切れたところは変位電流になっていると考えることができる。真の電流が存在しない場合、あるいは電荷による電気力線がない場合は、変位電流がそれ自体で閉じたループを作ることになる。

マクスウェルの方程式

以上の他に不完全なところは見つからず、これで電磁気学の基本方程式はそろったと考えられる。結局、自然界の電磁気現象を表わす基本方程式は、次の４つに集約されることになる。

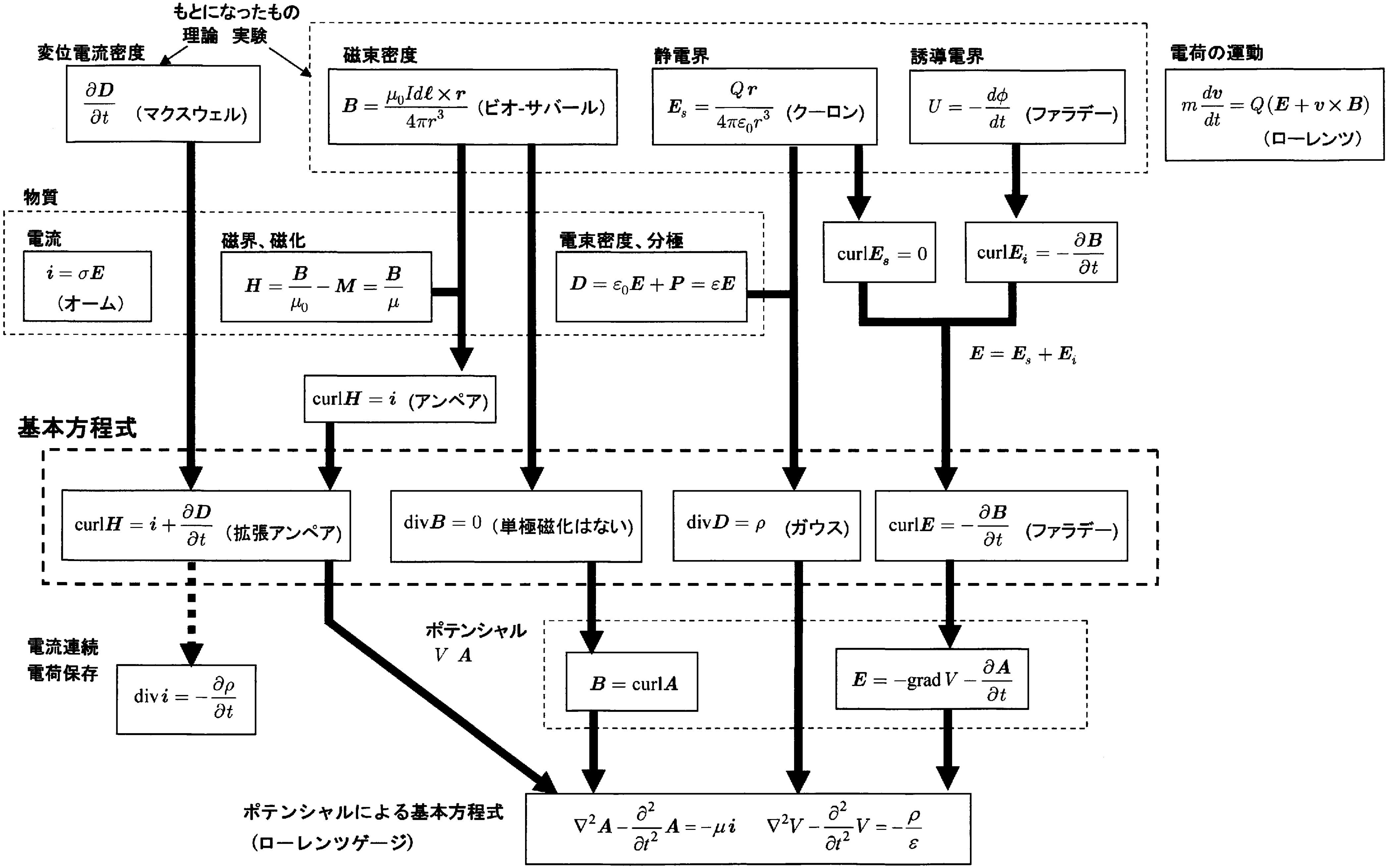
	微分表現	積分表現	概念図
ガウスの法則	$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho$	$\oiint \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = Q$	
ファラデーの法則	$\mathrm{curl}\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$	$\oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \iint_S \left(-\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S}$	
単極磁荷はない	$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$	$\oiint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = 0$	
拡張された アンペアの法則	$\mathrm{curl}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$	$\oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{H}\cdot d\ell = I + \iint_S \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}$	

微分表現と積分表現の間の変換、および、それぞれの方程式と概念図を言葉で説明することは簡単である(各自行うこと)。これらをまとめて基本方程式の原型を作ったのはマクスウェルなので、これらはマクスウェルの方程式とよばれる。時間微分を含む２番目と４番目の２つを指して特にマクスウェルの方程式とよぶこともある。

マクスウェルが最初に電磁気の基本方程式の原型を発表したときには、実は、方程式にはポテンシャルなどの余分なものが含まれており、大変複雑な形をしていた。基本方程式を原型から上のようにたった４つのスリムな形にしたのはヘルツやヘビサイドであった。

以上で、この講義で出るべき基本方程式はすべて出尽くした。前半からの分も含めて、出てきた基本式とそのつながりをまとめると次ページのようになる。

基本方程式の総まとめ


もとになったもの
理論　実験
変位電流密度
$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ （マクスウェル）
磁束密度
$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I d\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{r}}{4\pi r^3}$ （ビオ-サバール）
静電界
$\boldsymbol{E}_s = \frac{Q\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ （クーロン）
誘導電界
$U = -\frac{d\phi}{dt}$ （ファラデー）
電荷の運動
$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = Q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$
（ローレンツ）
物質
電流
$\boldsymbol{i} = \sigma \boldsymbol{E}$
（オーム）
磁界、磁化
$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu}$
電束密度、分極
$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon \boldsymbol{E}$
$\mathrm{curl}\,\boldsymbol{E}_s = 0$
$\mathrm{curl}\,\boldsymbol{E}_i = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$
$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_s + \boldsymbol{E}_i$
$\mathrm{curl}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}$ （アンペア）
基本方程式
$\mathrm{curl}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ （拡張アンペア）
$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0$ （単極磁化はない）
$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho$ （ガウス）
$\mathrm{curl}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ （ファラデー）
電流連続
電荷保存
$\mathrm{div}\,\boldsymbol{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$
ポテンシャル
V $\boldsymbol{A}$
$\boldsymbol{B} = \mathrm{curl}\,\boldsymbol{A}$
$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$
ポテンシャルによる基本方程式
（ローレンツゲージ）
$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{i}$　$\nabla^2 V - \frac{\partial^2}{\partial t^2} V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$

なお、前ページの図には、電界、磁束密度、電束密度、磁界、およびそれらのポテンシャルの成り立ちを中心にしたので、エネルギー、静電容量、インダクタンスに関連する部分は含めていない（重要でないということではない)。

一番最後にあるポテンシャルによる基本方程式は、説明しなかった内容であるが、4つの基本方程式をポテンシャルを使って表わした場合を示している。扱う現象によっては、この方程式を使うほうが便利なことも多いが、この講義ではここまではやらずに4つの基本方程式で話を進める。

基本方程式の独立でない部分について

以上に述べた4つの基本方程式について、以下のような点を注意しておく。
まず$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$および$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$とおけば基本方程式は次のようになる。

$$\begin{cases} \mathrm{div}\boldsymbol{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon} \\ \mathrm{curl}\boldsymbol{E}+\mu\dfrac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=0 \\ \mathrm{div}\boldsymbol{H}=0 \\ \mathrm{curl}\boldsymbol{H}-\varepsilon\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\boldsymbol{i} \end{cases}$$

この方程式は、電荷密度と電流密度が与えられたときに、どのような電界と磁界が発生するかということを表わす方程式である。つまり、未知数は電界と磁界であり、その他は与えられている。

ここで次のような疑問点が出てくる。未知数は電界ベクトルと磁界ベクトルなので、その成分の数は合計で6個である。しかし、方程式の数は、上の4つのうちスカラとベクトルがそれぞれ2つずつなので、成分としては合計8個ある。すなわち、未知数の数よりも方程式の数のほうが多いのである！これは方程式の中に独立でないもの（つまり他の式を使って導出可能な式）が含まれていることを意味している（全部が独立であるとすると、解が存在しないことになり、基本方程式として意味を成さなくなる)。以下に独立でない例をあげておく。

① $\mathrm{curl}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$ と $\mathrm{div}\boldsymbol{D}=\rho$

電流連続の式 $\mathrm{div}\boldsymbol{i}+\partial\rho/\partial t=0$（これは電流の定義ともいえる式なので常に成り立つ)があるために、この2つは独立ではない。すなわち、$\mathrm{curl}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{i}+\partial\boldsymbol{D}/\partial t$の両辺にdivを作用させ、電流連続の式を用いると、$0=\dfrac{\partial}{\partial t}(\rho-\mathrm{div}\boldsymbol{D})$ が得られるが、この式は$\rho-\mathrm{div}\boldsymbol{D}$という量が時間的にずっと一定不変であることを示しており、もし$t=-\infty$の過去の値（初期値）が0であったとすると、常に$\rho-\mathrm{div}\boldsymbol{D}=0$ つまり$\mathrm{div}\boldsymbol{D}=\rho$が成り立つことになる。

② $\mathrm{curl}\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ と $\mathrm{div}\boldsymbol{B}=0$

$\mathrm{curl}\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t$の両辺にdivを作用させると$\dfrac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\boldsymbol{B})=0$が得られ、①と同様に、$t=-\infty$において$\mathrm{div}\boldsymbol{B}=0$であったとすると、つねに$\mathrm{div}\boldsymbol{B}=0$が成り立つことになる。

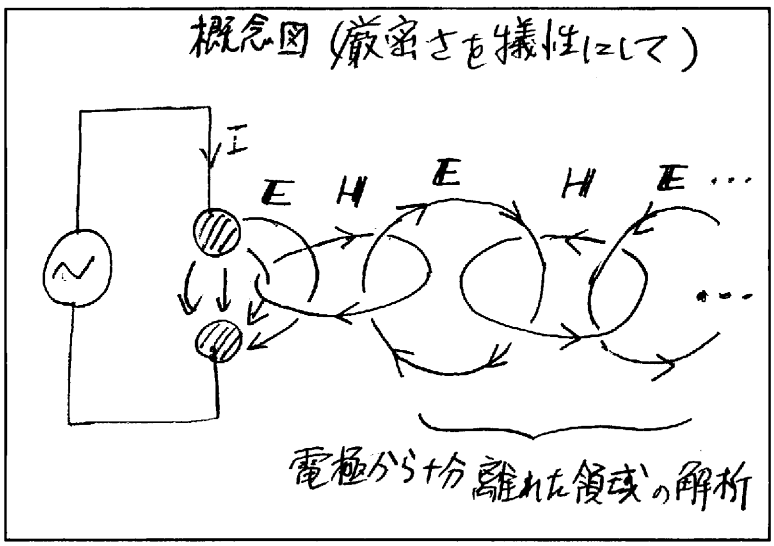
このように4つの方程式は独立ではないので、扱う現象によっては、まったく使わない式もある。しかし、どれを使ってどれを使わないかということは解く問題によって異なることであるし、また、4つの方程式はそれぞれ明瞭な物理的意味をもっているので、4つをそのまま基本方程式としておく。

電磁波

4つの基本方程式から電磁波が存在することを導出する。

上で述べたように、4つの基本方程式は、電荷密度と電流密度が与えられたときに、どのような電界と磁界が発生するかということを表わす方程式である。たとえば下図のように、交流電源につながれた電極の間から電界と磁界が放射されていくことを数式によって扱うことができる（下図の電気力線と磁力線は、電極から放射するというイメージを表わしているが、厳密にいうと正しい図にはなっていない。後の回で説明する予定である。）ここでは、電極から十分離れたところへも電気力線と磁力線が伝わっていくことを示すのが目的であるから、下図で電極から十分離れた空間だけを考えることとして、基本方程式の中で $\rho = 0$ および $\boldsymbol{i} = 0$ とおく。さらに真空中を考え $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$ とおく。これらの状況において基本方程式は

$$\begin{cases} \mathrm{div}\boldsymbol{E} = 0 \\ \mathrm{curl}\boldsymbol{E} = -\mu_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\boldsymbol{H} = 0 \\ \mathrm{curl}\boldsymbol{H} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \end{cases}$$



この方程式の2番目と4番目をみるとわかるように、磁界 $\boldsymbol{H}$ の時間的変化により電界 $\boldsymbol{E}$ が発生し、さらにその電界 $\boldsymbol{E}$ の時間的変化により磁界 $\boldsymbol{H}$ が発生し、. . . ということを繰り返して、電界と磁界が空間を伝搬していく。

上の方程式は $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ に関して非常によく似た（つまり非常に対称性のよい）形になっている。ただし、2番目の式と4番目の式の符号が異なっている。実は、このことは、この後説明する電磁波の伝搬にとって非常に重要で、こうなっていないと電磁波は伝搬しない。

電磁波の導出

2番目の式 $\mathrm{curl}\boldsymbol{E} = -\mu_0 \partial \boldsymbol{H}/\partial t$ の両辺に curl を作用させ、4番目の式 $\mathrm{curl}\boldsymbol{H} = \varepsilon_0 \partial \boldsymbol{E}/\partial t$ を用いると

$$\mathrm{curl}\,(\mathrm{curl}\boldsymbol{E}) = \mathrm{curl}\left(-\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{curl}\boldsymbol{H}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \boldsymbol{E}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

ここで、最左辺に次のベクトル公式を用いる。

$$\mathrm{curl}\,(\mathrm{curl}\boldsymbol{E}) = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E}$$

ただし

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

さらに基本方程式の一番目 $\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 0$ を用いると、最終的に次の式が得られる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{E} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E} = 0$$

この微分方程式を解くと電界 $\boldsymbol{E}$ が求まるのであるが、簡単のために $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$ とすると

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\boldsymbol{E} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E} = 0$$

以上とまったく同じ手順により、磁界に対しても同じ形の方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\boldsymbol{H} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{H} = 0$$

が得られる（各自確かめよ）。

こうして、上記の方程式を解いてベクトル関数 $\boldsymbol{E}(z,t)$ および $\boldsymbol{H}(z,t)$ を求めるという問題になったが、これらのベクトル関数の成分を一般的に $f(z,t)$ と書くと、この問題は、数学的には次の形の偏微分方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} f(z,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(z,t) = 0$$

を解くという問題である。ただし、この式中の定数 c は、もとの式と対応させると $1/c^2 = \varepsilon_0\mu_0$ である。

この形の偏微分方程式は波動方程式とよばれる。すぐあとに示すように、この方程式の解は波動として空間を伝わる形になっているからである。電磁気に限らず波動として伝わる物理量はたいていこの方程式を満たす（たとえば音波、弾性体の歪波、など）。ただし、この方程式以外で表される波動もある。たとえばシュレディンガー方程式を満たす電子波は、空間に関しては **2** 階微分だが、時間に関しては **1** 階微分である（その結果として解は複素数というやや特殊な事情になる）。

波動方程式の一般解について

数学的には、上に述べた波動方程式は解として次の形を持っている。

$$f(z,t) = F_1(z - ct) + F_2(z + ct)$$

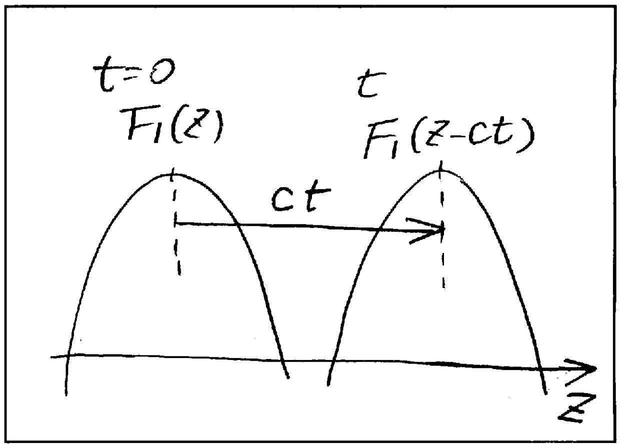
ただし、$F_1(z)$ と $F_2(z)$ は任意の形の関数である。

上のような関数形が解になっているかどうかは、もちろんもとの方程式に代入してみれば確かめられる（各自確かめよ）が、最初から解を求めるには次のような方法を用いる。

波動方程式を解く方法はいくつかあるが、代表的なもののひとつは変数分離法とよばれるもので、解を $f(z,t) = Z(z)T(t)$ のように z だけの関数 $Z(z)$ と t だけの関数 $T(t)$ の積であると仮定して、これを方程式に代入し、$Z(z)$ だけの方程式と $T(t)$ だけの方程式に分離する方法である。しかし、この方法は、いまこれから説明しようとしている内容には適さない。この方法で得られる解には、空間を伝わる波は含まれないのである（詳細は省略するが、定在波とよばれる空間にとどまっている波だけが解として出てくる）。

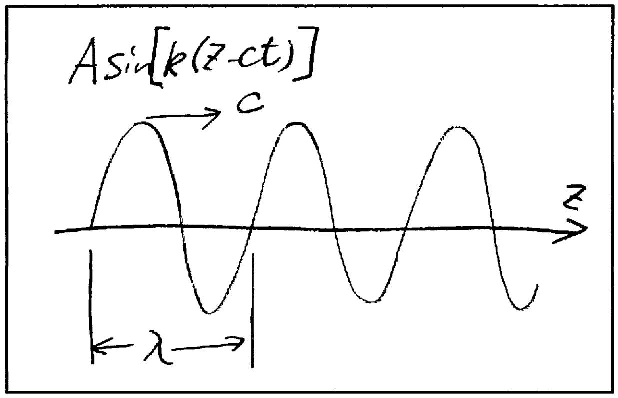
もうひとつの方法は、関数の独立変数 z と t を式 $\xi = z - ct$ と $\zeta = z + ct$ によって別の変数 ξ と ζ に変換し、方程式もこれらに関する微分方程式に変換する方法である。このようにすると、方程式は簡単な形になり、$F_1(\xi)$ と $F_2(\zeta)$ を任意の形の関数（ただし微分可能）として、解が $F_1(\xi) + F_2(\zeta) = F_1(z-ct) + F_2(z+ct)$ という形になることがすぐわかる。これが上に示した解で、ここで説明する内容にはこの形が適している。

数式を見ただけではこの解の性質はすぐわからないかもしれないが、この関数形には次のような性質がある。たとえば、$F_1(z-ct)$ を考えてみる。$t=0$ での解は $F_1(z)$ であり、時刻 t の解はこれを ct だけ z 軸の正方向に移動したものになっている。すなわち、時間とともに速度 c で z 軸の正方向に移動していく任意の関数 $F_1(z)$ が、この方程式の解なのである。



同様に、解 $F_2(z+ct)$ は任意の関数 $F_2(z)$ が速度 c で z 軸の負方向に移動していくことを表している。

任意の関数がそのままの形で z 軸の正負方向に移動していくというのは、まさに波動の伝搬を表している。$F_1(z)$ と $F_2(z)$ の形は任意でよいのだが、よく使われるのは(右図)、



$$F_1(z) = F_2(z) = A\sin kz$$

$\sin kz$ の代わりに $\cos kz$ や複素表示の $e^{\pm jkz}$ もよく使われる。これを用いると、z の正方向に進む波動は

$$\begin{aligned} F_1(z-ct) &= A\sin[k(z-ct)] \\ &\equiv A\sin(kz-\omega t) \\ &\equiv A\sin\left\{2\pi\left(\frac{z}{\lambda}-ft\right)\right\} \\ &\equiv A\sin\left\{2\pi\left(\frac{z}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)\right\} \end{aligned}$$

電磁波

以上により波動方程式の解の数学的な形がわかったので、もとの方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\boldsymbol{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E} = 0 \quad \text{および} \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\boldsymbol{H} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{H} = 0$$

にもどると、上述の解との対応から、電界 $\boldsymbol{E}$ と磁界 $\boldsymbol{H}$ は次の速度で進む波動になっている。

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

具体的にこの速度の数値を計算してみると 3×10^8 m/s になる（各自確かめよ）。この速度は、マクスウェルが基本方程式を発表した当時、光に対して測定されていた速度に等しく、このことから光は電磁波と結論された。これが電磁気の基本方程式から得られるもっとも重大な結論である。

以上は真空中を進む電磁波に対しての議論であるが、物質中に対しても ε_0 と μ_0 を物質の誘電率 ε と透磁率 μ に代えるだけでそのまま成り立つ。この場合の電磁波の速度は

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\varepsilon_0\mu_r\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} \equiv \frac{c}{n}$$

ただし、ε_r と μ_r は物質の比誘電率と比透磁率である。この式から、物質中の電磁波の速度(光速)は真空中の値を $n=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$ で割った値になる(遅くなる)。通常は $\mu_r\simeq1$ の物質が多いので $n\simeq\sqrt{\varepsilon_r}$ となる。この n

は屈折率として知られている。つまり、電磁気の基本方程式から、屈折率は比誘電率の平方根であるということが明らかになった。

電界と磁界の波動の形としては、上で述べたように次式を用いるのが都合がよい。

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{E}_0\sin[k(z-ct)]\equiv\boldsymbol{E}_0\sin(kz-\omega t)\equiv\boldsymbol{E}_0\sin\left\{2\pi\left(\frac{z}{\lambda}-ft\right)\right\}\equiv\boldsymbol{E}_0\sin\left\{2\pi\left(\frac{z}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)\right\}$$

$$\boldsymbol{H}(z,t)=\boldsymbol{H}_0\sin[k(z-ct)]\equiv\boldsymbol{H}_0\sin(kz-\omega t)\equiv\boldsymbol{H}_0\sin\left\{2\pi\left(\frac{z}{\lambda}-ft\right)\right\}\equiv\boldsymbol{H}_0\sin\left\{2\pi\left(\frac{z}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)\right\}$$

ここで、式中の各パラメータの関係は

$$k=\frac{2\pi}{\lambda},\quad \omega=kc=2\pi f=\frac{2\pi}{T},\quad c=f\lambda$$

各パラメータは次のようによばれている。

$\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{H}_0$　　電界と磁界の振幅

λ 波長	(波動の一周期の長さ	単位[長さ])
k 波数	(長さ 2π 中にある λ の数。	単位[1/長さ])
ω 角周波数	(単位[rad/s])	
f 周波数	(単位[Hz]（ヘルツ）)	
T 周期	(単位[時間])	

電磁波の周波数と波長は広範囲にわたっているので、次のような補助単位が使われる。

f [Hz]	(ヘルツ)	λ [m]	(メートル)
10^3[Hz] = [kHz]	(キロヘルツ)	10^{-2}[m]=[cm]	(センチメートル)
10^6[Hz] = [MHz]	(メガヘルツ)	10^{-3}[m]=[mm]	(ミリメートル)
10^9[Hz] = [GHz]	(ギガヘルツ)	10^{-6}[m]=[μm]	(マイクロメートル、または　ミクロン)
10^{12}[Hz]= [THz]	(テラヘルツ)	10^{-9}[m]=[nm]	(ナノメートル)
10^{15}[Hz]= [PHz]	(ペタヘルツ)		

電磁波のうちの3THz以下の領域は電波と呼ばれる。数十THz以上の領域は光である。たとえば可視光は500THzの前後である（普通は波長 λ の大きさで示す。$\lambda=0.5\mu m$ 前後)。光と電波の境界(数 THz)は未開拓の領域でまだあまり使われていない。詳細は省略するが、いろいろな周波数が実際に通信に使われていることは知っての通りである。

以上によって、電磁気の基本方程式から電磁波の存在が導かれ、また、電磁波が光の速度で進むということがわかった。しかし、以上で示した解析では次のことはわからない。電磁波は横波か縦波か？（すなわち、電界の方向、磁界の方向、電磁波の進行方向の関係はどうなっているのか)、電界と磁界の大きさ(振幅)の関係は？ 電界と磁界の位相の関係は？

これらについて次の回で説明する予定である。また、電磁波は電気力線と磁力線が伝搬する現象であるから、電気エネルギーと磁気エネルギー、また運動量も同時に運ばれているはずである。これらについても次の回で説明する予定である。