第9回

内容　磁気によるエネルギー、仕事、力（つづき）

- **仮想変位の原理**

  磁気による力、マクスウェルの応力

- **電流ループ、磁気双極子にはたらく力とエネルギー**
- **第8回と9回のまとめ**

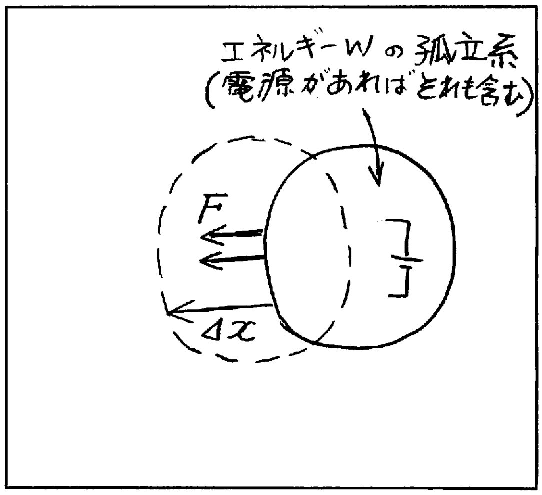
仮想変位の原理

エネルギーをもつ系には力がはたらく。たとえば、電荷を蓄積したコンデンサは静電エネルギーを持つので電極間に力がはたらく。また、高いところにある物体は位置エネルギーを持つために下方に向かう重力を受ける。いずれも系全体のエネルギーが減少する方向に力がはたらいている。このような、エネルギーをもつ系にはたらく力を求める一般的な原理を説明し、これを磁気エネルギーをもつ系に適用してみる。

エネルギーWをもつ孤立系を考える。ここで、孤立系というのは、外部とまったくエネルギーのやり取りのない系を意味する。もし、系が電源とつながっているなら、電源もまとめてひとつの系とみなしてしまい、孤立系と考える。

この系はエネルギーをもっているために力を受けている。いま、この力Fの方向をxとし、Fによって系がΔxだけ移動したと仮に考えてみる。(概念図を右に示した。具体例は下記の例1と2の図を参照。) この移動によって外部になされた仕事量は$F\Delta x$である。このとき、系のエネルギーがこの仕事に使われたと考えることができるので、エネルギー変化をΔWとすると（増加を正としている）、$F\Delta x = -\Delta W$が成り立つ。　$\Delta x \to 0$の極限を考えると、系にはたらく力は

$$F = -\frac{\Delta W}{\Delta x} \to -\frac{\partial W}{\partial x} \quad (x \to 0)$$



これはエネルギーをもつ系に対してはたらく力の一般的な形を表している。系の持つエネルギーは、電気エネルギー、磁気エネルギー、力学的エネルギーなど、どんな種類でもよい。エネルギーをもつ系に対して、仮に動いたらと考えるこの方法を、仮想変位の原理とよぶ。

以上は1次元方向のみを考えた場合であるが、3次元的に考えてベクトルで表すと

$$\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}\, W$$

例1

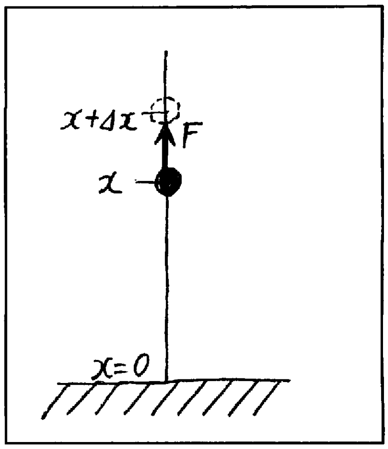
簡単な例として、高さxにある質点mにはたらく重力Fを仮想変位の原理で求めてみよう(下図)。

質点にはたらく力Fをx方向(上向き)とし、仮に高さが$x \to x + \Delta x$となったと考えてみる。(我々は重力が下向きにはたらくことを知っているから、x方向(上向き)と考えるのはおかしいと思うかもしれないが、あえてこのようにおいてみる。それでも正しい方向に力が求まることがあとでわかる。)

質点の位置エネルギーは$W = mgx$から$mg(x+\Delta x)$に変化する。したがって、移動によるエネルギーの増加分は$\Delta W = mg\Delta x$となるので、質点にはたらく力は、仮想変位の原理により

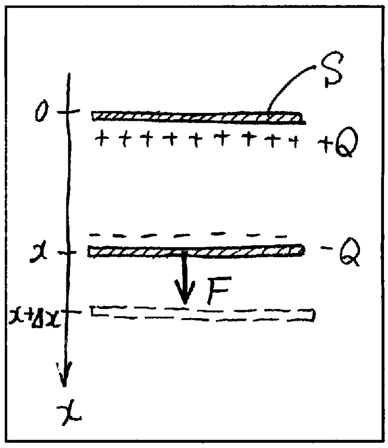
$$F = -\frac{\Delta W}{\Delta x} = -mg$$

Fを上向きとしたが、式にしたがって計算した結果は負となり、重力が下向きにはたらくという当然の結果がきちんと出ている。



例 2

平行に置かれた2枚の導体板に電荷$\pm Q$が帯電している（右図）。このとき、導体間にはたらく力を仮想変位の原理により求めてみる。ただし、電源はつながれていないとする。



導体板の面積をS、間隔をxとすると、この系のエネルギーは

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 x}{2\varepsilon_0 S}$$

導体間にはたらく力により、仮に間隔が$x \to x+\Delta x$になったと考える（xが増加する方向を考えた、ということはFは反発力であると仮定している)。このとき、エネルギーの変化(増加分)は

$$\Delta W = \frac{Q^2 \Delta x}{2\varepsilon_0 S}$$

したがって、導体間にはたらく力は　$F = -\frac{\Delta W}{\Delta x} = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} < 0$

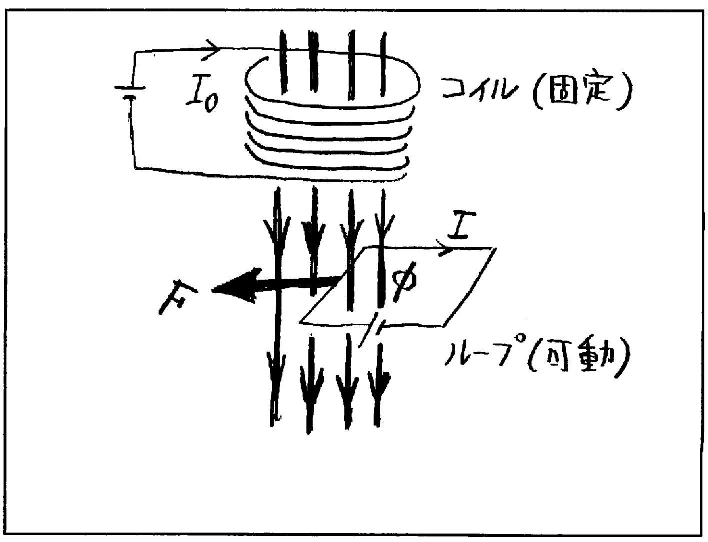
$F<0$となったということは、導体間に引力がはたらくことを表わしている。なお、Fに係数1/2がなぜ含まれているかについては前半の講義で説明があったと思う。

もちろん、ΔWではなくWの式から直接$F = -\partial W / \partial x$によって計算してもよい。また、この例では孤立系は2つの導体だけである（電源はつながっていない)。前半の講義でやったと思うが、電源がつながっている場合は、Qが一定でないので上の式は使えず、また、ΔWとしては静電エネルギーの変化だけでなく、電源のエネルギーの変化も考えなければならない。

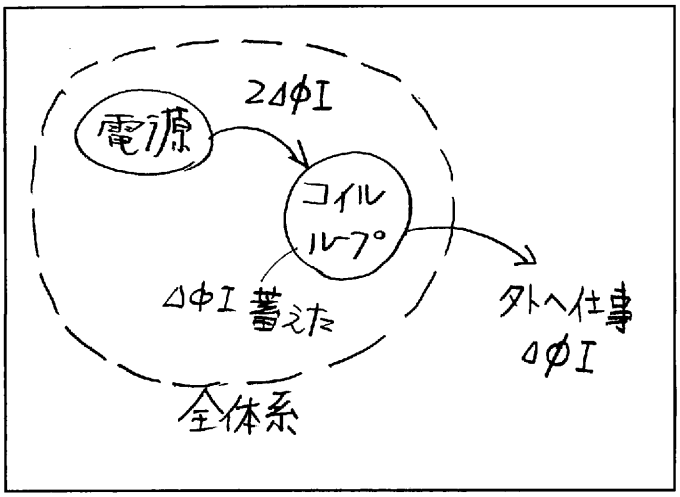
磁気による力

前回の説明で用いた右図の系（固定コイルと可動ループ）において、ループにはたらく力を仮想変位の原理で表わしてみよう。

磁気エネルギーの場合は、静電エネルギーと違って、電流を流すための電源がかならず必要なので、孤立系を考えるときは必ず電源を含めることになる。右図の場合はコイルとループ、および、それぞれにつながれた電源の全体をひとつの孤立系とみなすことができる。



前回説明したように、ループが力Fの方向にΔxだけ移動したときの、系全体のエネルギー変化は右図のようになる。



系全体のエネルギー変化は

$$\Delta W = -I\Delta\phi$$

したがって

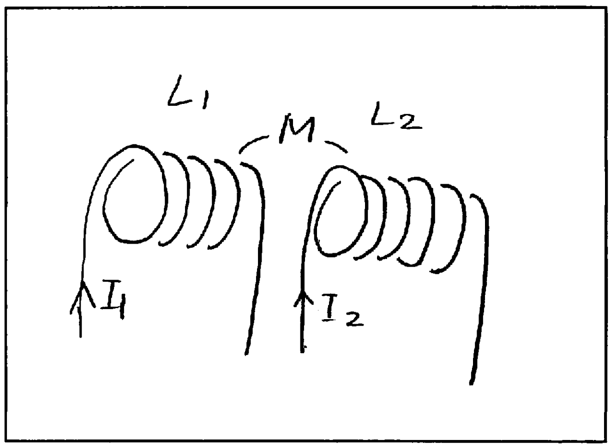
$$F = -\frac{\Delta W}{\Delta x} = I\frac{\Delta\phi}{\Delta x} = I\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

右図を参照して、この式を次のように書くこともできる。

$$F = -\frac{\partial}{\partial x}(\text{全体系のエネルギー}) = +\frac{\partial}{\partial x}(\text{コイルとループの蓄えたエネルギー})$$

コイルとループの蓄えたエネルギーとは、具体的には磁気エネルギーである。すなわち、力を計算するときは、磁気エネルギーだけを（つまり電源のエネルギーは考えに入れないで）、求めたい力の方向に微分すればよい（符号は正でよい）。

この結果は一般的に成り立つ。すなわち、右図のように空間にコイルが2個置かれているとき



$$F = +\frac{\partial}{\partial x}(\text{コイルの蓄えたエネルギー})$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}L_1 I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}I_1^2\frac{\partial L_1}{\partial x} + I_1 I_2\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{1}{2}I_2^2\frac{\partial L_2}{\partial x}$$

（コイルがたくさんあるときでも、この式を一般化することができる。各自考えてみよ。）

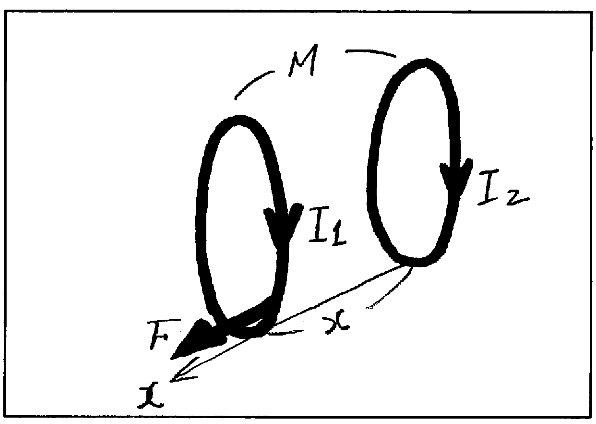
あるいは磁束密度と磁界で表わすと

$$F = \frac{\partial}{\partial x}\iiint_v \frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}dv$$

いくつか例を示す。

例1

右図のような2つのループの間にはたらく力。



ループ1に対してx方向にはたらく力は、相互インダクタンスをMとして

$$F = I_1 I_2\frac{\partial M}{\partial x}$$

ループ2にも同じ力がはたらいている。

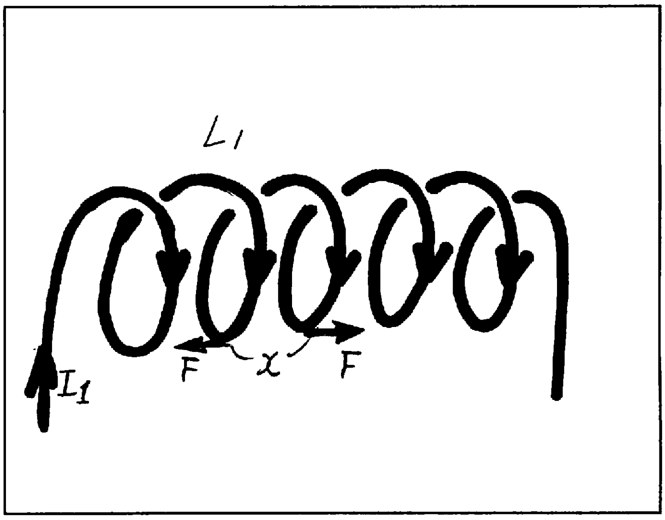
図では反発力を仮定して描かれているが、上式が引力になることはMの変化を考えるとわかる。

例 2

1 個のソレノイドの各部分に互いにはたらく力(右図)。自己インダクタンスをLとして

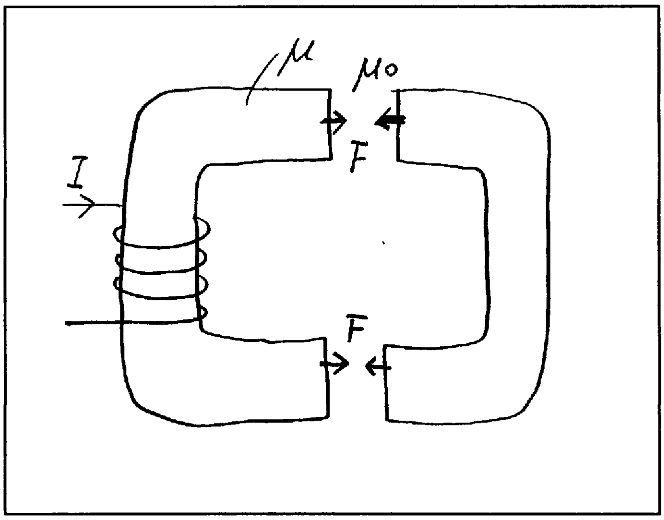
$$F=\frac{1}{2}I_1^2\frac{\partial L}{\partial x}$$

これも図では反発力のように描かれているが、計算すれば引力になるはずである。ソレノイドは磁束密度を発生すると同時に収縮しようとする。強力な電磁石を作るときは、この力によって潰れてしまわないような工夫がなされる。



例 3

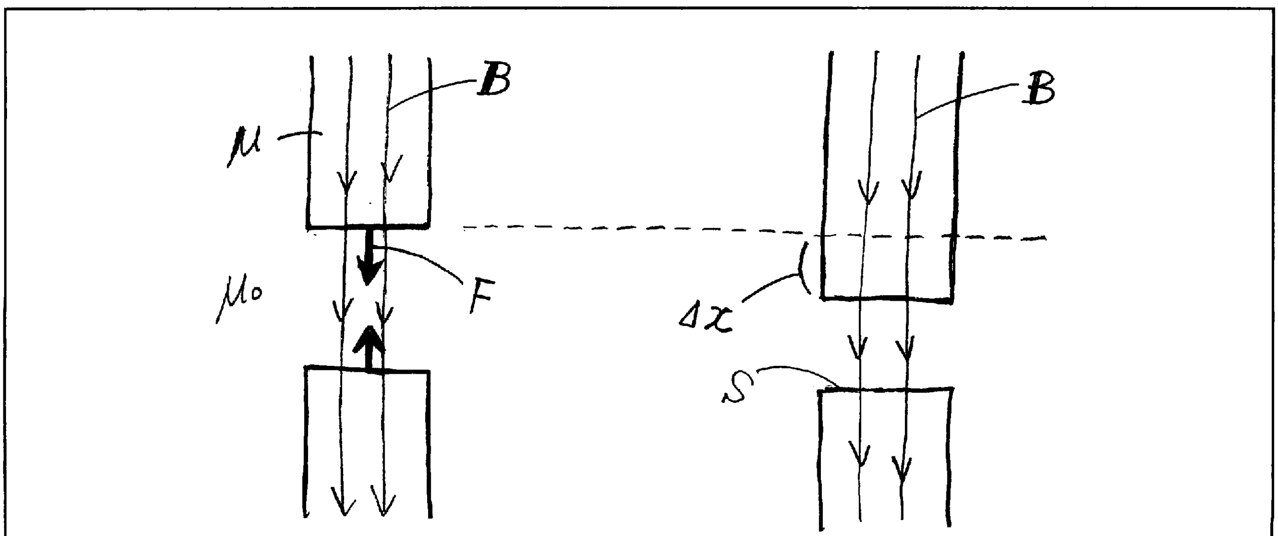
電磁石にはたらく力(右図)。
系のインダクタンスを求めて、上で説明したように計算すればよい。磁気回路の考えを用いると計算しやすい。
詳細は演習で行うであろう。



例 4

下図(a)のように磁性体の棒がギャップを隔てて向かい合っており、一定の磁束密度$\boldsymbol{B}$が加えられているとき、磁性体の間にはたらく力を求めてみる。

求める力Fを引力と仮定し、図(b)のようにFによってΔxだけギャップが小さくなったと考えてみる。このとき、図(b)の$S\Delta x$の部分が真空から磁性体に置き換わったとみなすことができる。このことによ



(a) (b)

る磁気エネルギーの変化は

$$\Delta W = \left(\frac{B^2}{2\mu} - \frac{B^2}{2\mu_0}\right) S\Delta x$$

（ここでは、$S\Delta x$ 以外の部分には何も変化はないと仮定している。すなわち、磁性体の棒は半無限に長いものとしている。）上式から

$$F = -\frac{\Delta W}{\Delta x} = \frac{B^2 S}{2}\left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}\right) > 0$$

$F > 0$ なので引力である。また、断面の単位面積あたりに対する力（つまり圧力）は

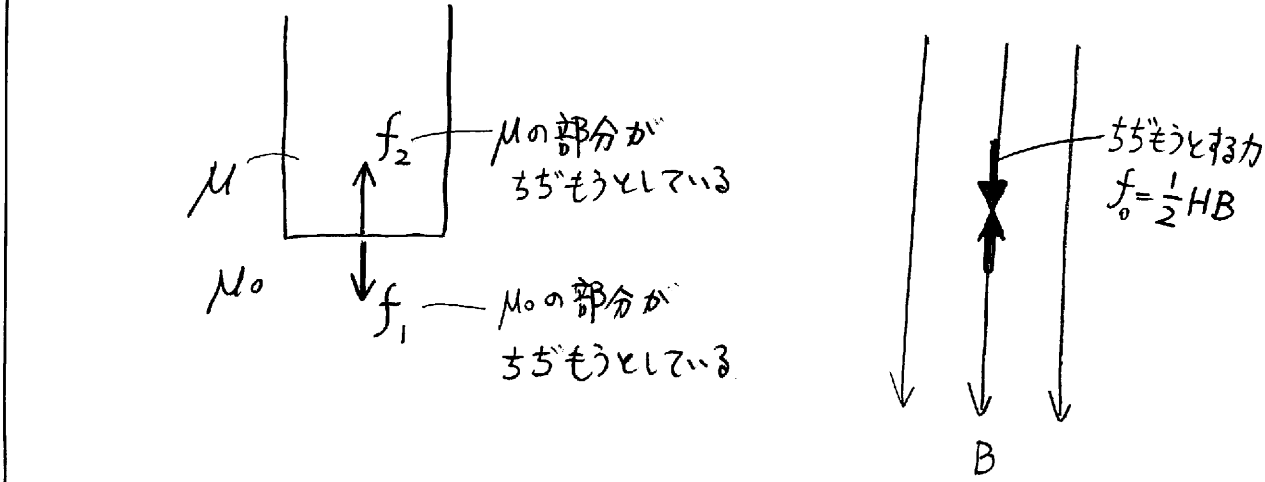
$$f = \frac{F}{S} = \frac{B^2}{2}\left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}\right)$$

ここで、この圧力を次のように書くことができる。

$$f = \frac{F}{S} = \frac{B^2}{2}\left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}\right) \equiv f_1 - f_2 \qquad \begin{cases} f_1 = \dfrac{B^2}{2\mu_0} = \dfrac{1}{2} H_0 B & (H_0 = B/\mu_0 \text{はギャップ中の磁界}) \\ f_2 = \dfrac{B^2}{2\mu} = \dfrac{1}{2} HB & (H = B/\mu \text{はギャップ中の磁界}) \end{cases}$$

これは圧力 f が下図(a)に示すような 2 つの力 f_1 と f_2 の差から生じていると考えていることになる。ここで、f_1 は磁性体の表面を真空部分(μ_0 の領域)が引っ張っているという張力であり、f_2 は磁性体の表面を磁性体内部(μ の領域)が引っ張っているという張力である。

さらに、この考えを次のように拡張することができる。下図(b)のように、磁力線はもともと引き伸ばされたゴムひものように、それ自身ちぢもうとしており、したがって磁力線の各点には張力がはたらいていると考えるのである。この張力が $f_0 = \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}/2$ で表わされるとすると、一様な物質の中（たとえば真空中）では張力はどこも同じで釣り合っているが、物質の境界面（たとえば図(a)）では透磁率の違いにより釣り合いが破れて、張力の差が物質の境界面にはたらく力となって現れるのである。



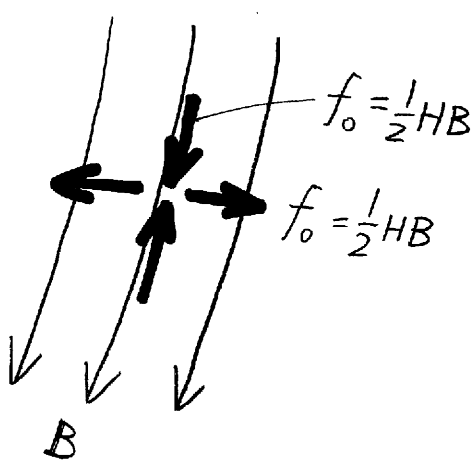
(a) (b)

マクスウェルの応力

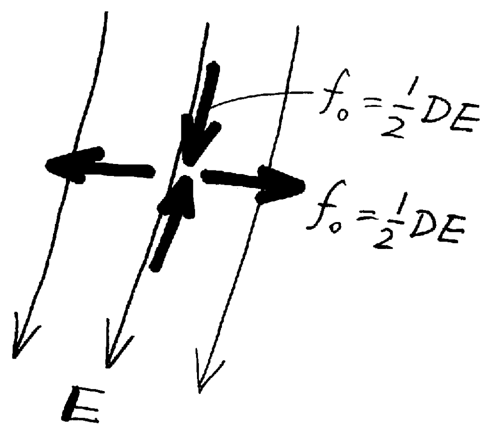
磁力線自体が張力をもつという考えを説明したが、このような張力(応力)は、実は、単なる便宜上とか概念上のものではなく、実際に存在すると考えてよい。たとえば、後の回で説明する電磁波は、電気力線と磁力線が空間を移動していくものであるが、このような張力(応力)を伴っていることの証明として、物質に電磁波が照射されると、その表面に圧力を及ぼすことが知られている。

この考え方によると、2つの電流の間にはたらく力は次のように説明することができる。一方の電流が磁束密度を発生し、他方の電流がそれを感知して力を受けるのであるが、この磁束密度は張力も伴っているので、空間を張力が伝わっていき（空間が弾性の連続物体のようになっていると考えている)、それが他方の電流に伝わって、この力を受けているのである。

この考え方をさらに進めると、アンペアの法則と電流にはたらく力の式を使って、この張力(応力)を導出することができる。やや複雑なので詳細は省略するが、結果の概略を示すと右図(a)のようになっている。磁力線の存在する空間の各点は、磁力線に沿って単位面積あたり縮もうとする力(応力) $f_0 = \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}/2$ を受けていると同時に、磁力線に垂直に広がろうとする同じ大きさの力 $f_0 = \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}/2$ を受けている。



(a)



(b)

この考えは磁力線に限ったことではなく、前半の講義でやった電気力線に対しても成り立っている。すなわち、2 つの電荷の間にはたらく力は、一方の電荷が発生した電界に伴う張力が他方の電荷に伝わって、力がはたらくのである。この場合も、ガウスの法則と電荷にはたらく力の式(つまり電荷×電界)から、この張力を導出することができる。右図(b)にその結果の概略を示した。図(a)の磁力線にまったく対応している。

以上のように、空間に電気力線および磁力線が存在するとき、これらには張力（応力）が伴っているのである。これらはマクスウェルの応力テンソルとよばれている。

電気力線（または磁力線）は互いに反発しあうように、また、一本一本は引っ張られたゴムひものようになっているという定性的な説明のある本をよくみかけるが、以上のような実際に存在する応力に基づいている。ファラデーはこれらの応力を数式なしで直感的に気づいていたといわれている。数式で導出して見せたのはマクスウェルである。

電流ループ、磁気双極子にはたらく力とエネルギー

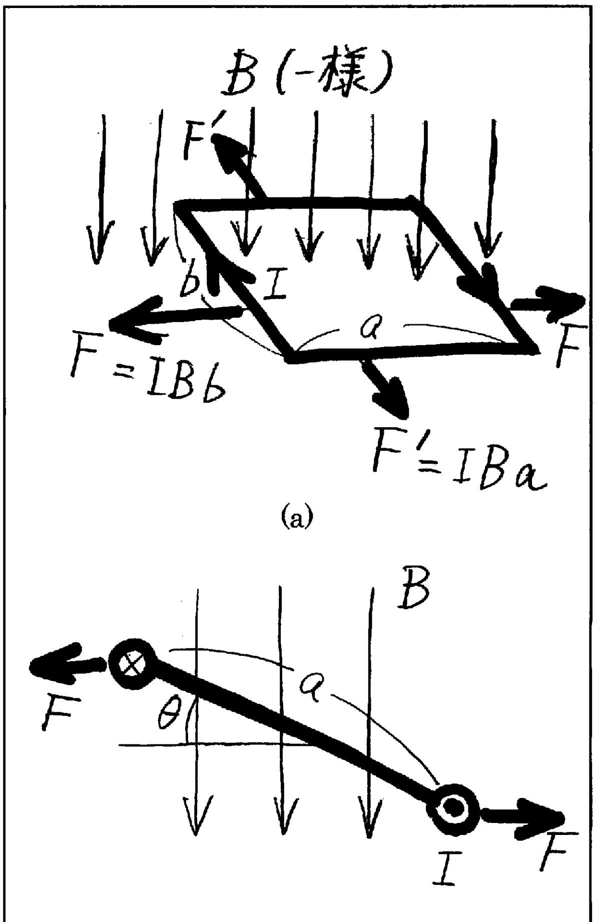
ここで、電流ループおよび磁気双極子にはたらく力とエネルギーについて説明しておく。教科書ではいろいろな箇所に分散しているが、講義ではここでまとめておく。

力

すでに出てきたように、電流素片に対して $\boldsymbol{F} = Id\boldsymbol{\ell}\times\boldsymbol{B}$ であり、電流ループに対しては

$$\boldsymbol{F} = \oint_C (Id\boldsymbol{\ell}\times\boldsymbol{B})$$

磁束密度 $\boldsymbol{B}$ が空間的に一様な場合とそうでない場合について、この力がどうなるかについて説明する。



(a)

(b)

① $\boldsymbol{B}$ が一様のとき

右図(a)のような長方形の電流ループを考えるとわかるように、各辺にはたらく力は釣り合っているのでループは移動しない。

しかし、ループの面と $\boldsymbol{B}$ が垂直でないと、次式のトルク（回転のモーメント）がはたらく(図(b))。

$$T = (F\sin\theta)a = (IBb\sin\theta)a = Iab\cdot B\sin\theta = mB\sin\theta$$

ただし、$m = Iab$ はループの磁気双極子モーメントである。トルクの方向は回転に対して右ねじの進む方向と定義されているので、上式をベクトルで表わすと

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}$$

② $\boldsymbol{B}$ が場所によって変化しているとき

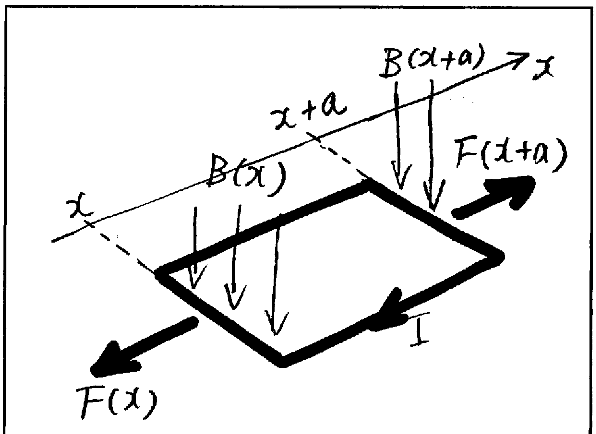
この場合は各辺にはたらく力が打ち消さないので、ループが移動する。右図のように、B が x 方向に変化している場合は、力 F は

$$\begin{aligned} F &= F(x+a) - F(x) \\ &= IB(x+a)b - IB(x)b \simeq I\frac{\partial B}{\partial x}ab = \frac{\partial B}{\partial x}m \end{aligned}$$

あるいは次のようにも表わすことができる。

$$F \simeq I\frac{\partial B}{\partial x}ab = I\frac{\partial(Bab)}{\partial x} = I\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

これは以前出てきた式である。



磁気双極子にはたらく力

磁気双極子 $m = IS$ にはたらく力の x 方向成分は、S が非常に小さいとして

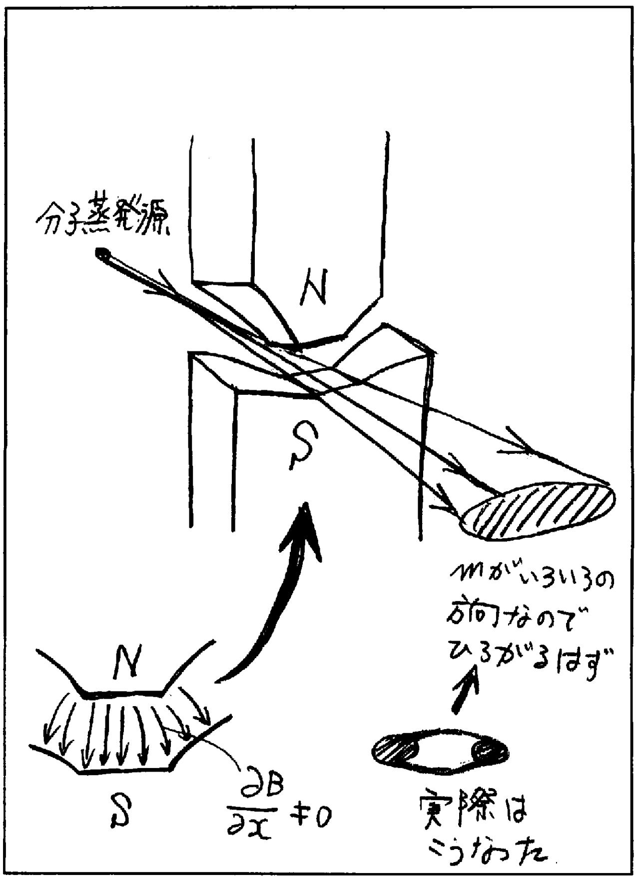
$$F_x = I\frac{\partial \phi}{\partial x} = IS\frac{\partial B}{\partial x} = m\frac{\partial B}{\partial x}$$

すなわち、磁束密度が不均一な場所では磁気双極子を移動させる力がはたらく。

(余談) このことを用いた歴史的に有名な実験がある。右図のように磁石の N 極と S 極で作った狭いギャップに、蒸発させた金属の分子(具体的には銀の分子)を通過させる。ギャップの形が平坦でないので、ここに生じている磁束密度は空間的に不均一になっており、もし通過する分子が磁気双極子モーメントをもっていたら、上記の力を受けて、通過後の方向が変化するはずである。

この実験の結果、確かに分子は通過後まっすぐでなく曲がった方向に飛び出してきた。したがって、以前講義でやったように、分子が磁気双極子モーメントを持っていることが確かめられたのである。

ところが必ずしも予想通りの結果ばかりではなかった。飛び込んでくる分子の磁気双極子モーメントはいろいろな方向を向いているはずなので、飛び出してきた分子はどんな角度に曲がったものもあるはずなのに、観測されたのは大きく 2 つの方向のものしかなかったのである。この結果から、分子の持つ磁気双極子モーメント（したがって角運動量）が離散的であり、しかも中に含まれる電子にスピンがあるということがわかり、量子力学の発展に大きく寄与することとなった。これはシュテルン-ゲルラッハの行った実験で、量子論の教科書によく出てくる。



磁気双極子のエネルギー

一定電流 I で微小面積 S のループを、磁束 0 の無限遠点から、磁束が ϕ となるところまで運んだとすると、以前説明したように、全体系（電源も含む）のエネルギー変化は

$$\Delta W = -I\Delta\phi = -I\left(\phi - \phi(\infty)\right) = -I\phi = -I\iint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} \simeq -I\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}$$

すなわち、磁束密度の中に置かれた磁気双極子モーメントは、エネルギーとして

$$E = -\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}$$

を持っていることになる。

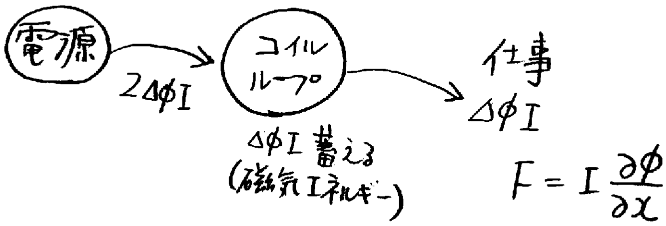
この式から $\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{B}$ が同じ方向にそろっているときエネルギーが最小であることがわかる。すなわち、双極子モーメントには $\boldsymbol{B}$ の方向を向かせるような力がはたらくことになる。

第8回と9回のまとめ

① インダクタンスのエネルギー　$\frac{1}{2}L_1I_1^2+MI_1I_2+\frac{1}{2}L_2I_2^2$

② 磁気エネルギー　$\iiint_v \frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}\,dv$　（インダクタンスのエネルギーが空間にこの形で分布している。）

③ 電流にはたらく力と仕事



④ 仮想変位の原理による力　$F=+\frac{\partial}{\partial x}$(磁気エネルギー)

⑤ 電流ループ、磁気双極子にはたらく力とエネルギー
　トルク（$\boldsymbol{B}$が均一）、移動（$\boldsymbol{B}$が不均一）、エネルギー

次回はすべての基本方程式の総まとめに入って行く。