第8回

内容　磁気によるエネルギー、仕事、力

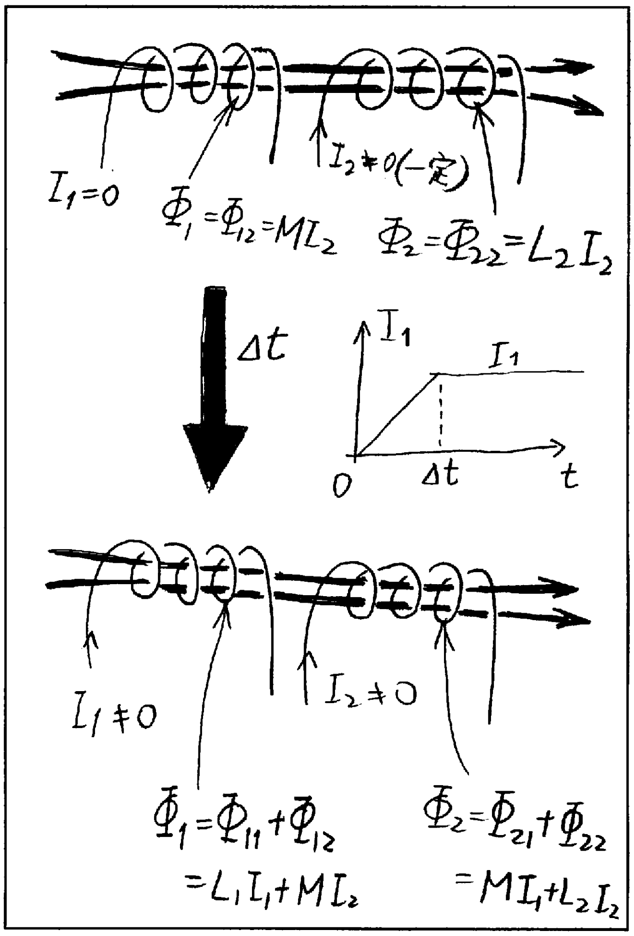
・インダクタンスの蓄えるエネルギー

・磁気エネルギー

・磁気による仕事とエネルギー

教科書 第13章後半の一部と第14章後半の一部に対応した内容。
今回の内容は9回に続いており、まとめを9回の最後に行う。

インダクタンスの蓄えるエネルギー



右図のように、2 つの隣合うコイルの電流を、最初$I_1=0$と$I_2=$一定$\neq 0$としておき、$t=0$からΔtの間にI_1を増加させて$I_1=$一定$\neq 0$とする。

この作業に要した仕事量はどれほどか、という点について考える。

$0<t<\Delta t$において各コイルの鎖交磁束は

$$\begin{cases}\Phi_1=L_1I_1(t)+MI_2\\ \Phi_2=MI_1(t)+L_2I_2\end{cases}$$

となるので、起電力は

$$\begin{cases}U_1=-\dfrac{d\Phi_1}{dt}=-L_1\dfrac{dI_1}{dt}\\ U_2=-\dfrac{d\Phi_2}{dt}=-M\dfrac{dI_1}{dt}\end{cases}$$

コイル1の電流I_1を徐々に増すことにより、これだけの起電力がコイル1と2に発生しているわけであるが、これらの起電力に対抗して外から電流を流し込んでいると考えてよいので、外部から（つまりコイル1と2につないだ電源から）コイル1と2に与えた仕事量は、単位時間あたり$|U_1|I_1+|U_2|I_2$となる。

$t=0$からΔtの間の全仕事量は

$$W=\int_0^{\Delta t}\left(|U_1|I_1+|U_2|I_2\right)dt=\int_0^{\Delta t}\left(L_1\frac{dI_1}{dt}I_1+M\frac{dI_1}{dt}I_2\right)dt=\int_0^{I_1}\left(L_1I_1dI_1+MI_2dI_1\right)=\frac{1}{2}L_1I_1^2+MI_1I_2$$

この仕事量が、そのままコイル1と2の蓄えるエネルギーになる。

この例では、話を少し簡単にするためにI_1だけを徐々に増加させており、I_2は一定としているが、両方とも変化させた一般的な場合は、コイル1と2の蓄えるエネルギーは次のようになる。

$$W=\frac{1}{2}L_1I_1^2+MI_1I_2+\frac{1}{2}L_2I_2^2$$

あるいは鎖交磁束で書き換えると

$$W=\frac{1}{2}\Phi_{11}I_1+\left(\frac{1}{2}\Phi_{12}I_1+\frac{1}{2}\Phi_{21}I_2\right)+\frac{1}{2}\Phi_{22}I_2=\frac{1}{2}\Phi_1 I_1+\frac{1}{2}\Phi_2 I_2$$

コイルがただ1つの場合は

$$W=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}\Phi I$$

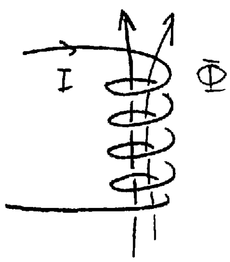
$L_1L_2 \geq M^2$ の導出

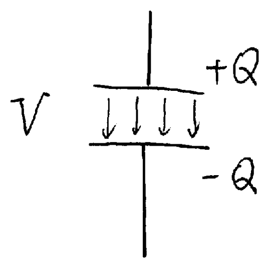
上で示したコイルのエネルギーを用いて、前回説明した「$L_1L_2 \geq M^2$ がどんな場合でも常に成立つ」ということを証明することができる。まず、

$$W=\frac{1}{2}L_1I_1^2+MI_1I_2+\frac{1}{2}L_2I_2^2=\frac{1}{2}L_1\left(I_1+\frac{M}{L_1}I_2\right)^2+\frac{1}{2}\left(L_2-\frac{M^2}{L_1}\right)I_2^2$$

と変形できるが、これを I_1 を変数とする 2 次関数とみなせば、$L_1>0$ であるから $I_1+(M/L_1)I_2=0$ のとき最小値 $W=\left(L_2-M^2/L_1\right)I_2^2/2$ をとる。W は蓄えるエネルギーなので、つねに $W\geq 0$ のはずであるから、これを最小値にも適用すると $L_2-M^2/L_1\geq 0$ 、すなわち $L_1L_2\geq M^2$ が常に成立たなければならない。

コンデンサのエネルギーとインダクタンスのエネルギーの対応





$$\boxed{W_m=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}\Phi I=\frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{L}}$$

$$\boxed{W_e=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$

磁気エネルギー

コンデンサが蓄えているエネルギーについては（前半の講義でやったと思うが）、電極にたまった電荷 $\pm Q$ がこのエネルギーを蓄えていると考えるかわりに、電極から出ている電気力線すなわち電界 $\boldsymbol{E}$（および電束密度 $\boldsymbol{D}$）が蓄えていると考えてもよい。つまり、エネルギーは電極にあるのではなく、空間に存在すると考えてもよい。この考え方に基づいてコンデンサのエネルギーの式を変形した結果、次の式が得られたのであった（前半の講義）。

$$W_e=\frac{1}{2}CV^2=\iiint_v \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\,dv$$

つまり、空間の単位体積あたりに $\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}/2\equiv w_e$ というエネルギーが蓄えられていると考えることができる。このの w_e のことを電気エネルギー密度とよんだ。

これは、考え方を変えたという概念上のことだけではなく、実際に電極がなくて電気力線だけがあるような場合（具体的には、光などのように空間を伝搬する電磁波。あとの回で詳しく説明する）でも、確かにエネルギーが運ばれているのは確かめられているので、現実的なことである。

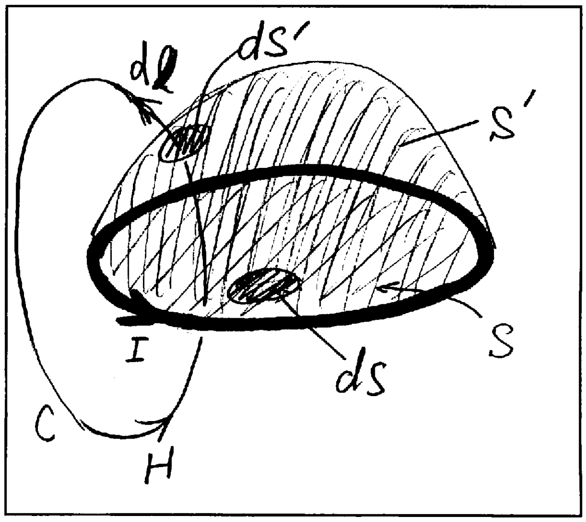
インダクタンスの蓄えるエネルギー$(1/2)LI^2$についても、同じ考えを適用することができる。つまり、このエネルギーは電流が持っているのではなく、空間にある磁束密度$\boldsymbol{B}$（および磁界$\boldsymbol{H}$）が蓄えていると考えてよい。式で書くと

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \iiint_v \frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}\,dv$$

$\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}/2 \equiv w_m$ は空間の単位体積あたりに蓄えられている磁気エネルギー密度である。

上式は次のように導出できる。
右図を参照して

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\Phi I = \frac{1}{2}\iint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} \oint_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{\ell} \\ &= \frac{1}{2}\iint_{S'} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}' \oint_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \frac{1}{2}\oint_C \left[\iint_{S'} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\,dS' \right] d\ell \\ &= \frac{1}{2}\iiint_{\text{全空間}} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\,dS'd\ell = \frac{1}{2}\iiint_{\text{全空間}} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\,dv \end{aligned}$$



また、ベクトルポテンシャルを用いて次のように表すこともできる。

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\Phi I = \frac{1}{2}\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{\ell} \iint_S \boldsymbol{i}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\iiint_v \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}\,dv$$

この表現には電流密度も含まれているので、$\boldsymbol{B}$と$\boldsymbol{H}$で表したエネルギーと違って、空間に蓄えられているというより、電流に蓄えられているという考え方のままになっている（つまりこの式の体積積分は全空間ではなくて導線部分でおこなう）。

磁気エネルギーと電気エネルギーの対応

磁気エネルギー		電気エネルギー
$W_m = \frac{1}{2}LI^2$		$W_e = \frac{1}{2}CV^2$
$= \frac{1}{2}\Phi I$	← 対応 →	$= \frac{1}{2}QV$
$= \iiint_v \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\,dv$		$= \iiint_v \frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\,dv$
$= \iiint_v \frac{1}{2}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}\,dv$		$= \iiint_v \frac{1}{2}\rho V\,dv$

インダクタンスの計算について

前回説明したように、インダクタンスは次の手順で計算することができる。

$$I \rightarrow B \rightarrow \phi \rightarrow \Phi = N\phi \rightarrow L = \Phi / I$$

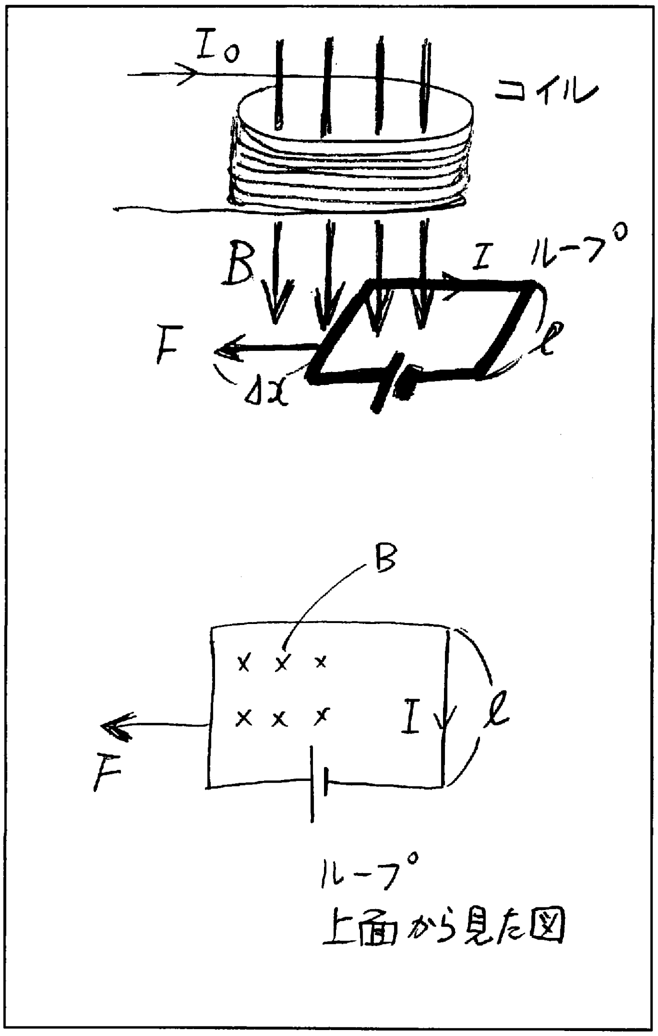
しかし、今回説明した内容を用いると、次の手順で行ってもよいことになる。

$$I \rightarrow B,H \rightarrow W_m = \iiint_v \frac{1}{2} B \cdot H dv \rightarrow L = \frac{2W_m}{I^2}$$

どちらでも場合に応じて使いやすいほうを使えばよいのであるが、後者の方法は、たとえばコイルの形が分かりにくいとき（たとえば太い導線が完全にループを形成していなくて、少しだけ曲がっているようなものなど。いいかえれば鎖交磁束が定義しにくいような形状）などには便利である。いくつかの例を演習で行うであろう。

磁気による仕事とエネルギー

物体を動かしたときの力学的な仕事量と磁気エネルギーの関係を、例題によって説明する。（文章が長いので複雑そうに見えるが、順を追っていけばさほどでもない。）



右図のように、固定されたコイルと移動可能な1回巻ループが置かれており、それぞれに一定電流I_0とIが流れている。

いま、図のようにコイルの発生する磁束密度Bがループの一部を貫いているとする。Bによってループにはたらく力をFとして、この力の方向にループをゆっくりΔxだけ移動させる場合を考える。このとき、どのような仕事量やエネルギーの変化が生じるだろうか。

ただし、この問題では電流I_0とIは終始一定に保たれると仮定する。つまりコイルとループにつながれた電源は、起電力の発生などがあっても、つねに電流を一定に保つように自動的に調整されるものとする。

ループのみに注目したエネルギー変化

移動Δxによってループが外部にする仕事量は、上図を参照して

$$W = F\Delta x = IB\ell\Delta x$$

移動Δxによってループを貫く磁束が変化する。この変化量を$\Delta\phi$とし、この移動をΔtの時間で行ったとすれば、起電力は$U = -\Delta\phi/\Delta t$となる。この起電力はループの電流Iを弱めようとする方向に発生するので（各自確認せよ）、Iを一定にするためにループの電源はUの分だけ電圧を大きくすることになる。その結果、電源は単位時間あたり$|U|I$のエネルギーをループに供給することになる。移動の間に電源が供給する全エネルギーは$|U|I\Delta t$となる。

結局、ループは移動によって外部に仕事をするのと同時に、電源からエネルギーの供給を受けることになる。したがって、ループのエネルギー変化は差引きで

$$\Delta W=-F\Delta x+|U|I\Delta t=-IB\ell\Delta x+\frac{\Delta\phi}{\Delta t}I\Delta t=-I\Delta\phi+I\Delta\phi=0$$

すなわち、外部に対する仕事はすべてループの電源が供給している。

注：次のような疑問を持つ人がいるかもしれない。非常にゆっくりと長い時間（数学的には$\Delta t\to\infty$とみなせるよう長い時間）をかけて移動すれば、発生する起電力は無視できるほど小さくなるから、この場合だけ考えれば、電源からのエネルギー供給は無視してよいのではないだろうか。これはだめである。移動の最初から最後までの全エネルギーを求めるときΔtをかけるので、結局同じことになる。

以上の結論は一般的に成立つ。すなわち、磁束密度の中で電流一定のループが力を受けて外部に仕事をする場合は、ループだけに注目すると（電源を除く）エネルギー変化$\Delta W=0$である。

コイルのエネルギー変化

今度は固定しているコイルに生じるエネルギー変化を考えてみよう。コイルは移動していないのでエネルギー変化は何もないように見えるが、そうではない。

ループの電流も磁束密度を発生しており、これによる磁束がコイルを貫いている。ループの移動Δxによってこの磁束も変化し、コイルに起電力U'が発生する。このときの鎖交磁束の変化を$\Delta\phi'$とすれば$U'=-\Delta\phi'/\Delta t$である。上に述べたループの場合と同じように、この場合もコイルの電流を一定に保たせるためにコイルの電源がコイルにエネルギーを供給することになる。コイルは外部に仕事をしていないので、このエネルギーはコイルに蓄えられるだけになる。

コイルの蓄えるエネルギーは

$$\Delta W'=|U'|I_0\Delta t=\frac{\Delta\phi'}{\Delta t}I_0\Delta t=\Delta\phi' I_0$$

$\Delta\phi'$は次のようにして求めることができる。ループが静止しているときを考え、コイルの電流I_0によりループを貫いている磁束をϕとすると、ループとコイルの間の相互インダクタンスは$M=\phi/I_0$となる。一方、ループの電流Iによりコイルを貫いている鎖交磁束をϕ'とすると、相互インダクタンスは$M=\phi'/I$となる。相反定理（前回説明した）によってこの2つは等しいので、$\phi/I_0=\phi'/I$が成立つ。移動Δxの前後でもこれは成立つはずであるから、$\Delta\phi/I_0=\Delta\phi'/I$となる。したがって

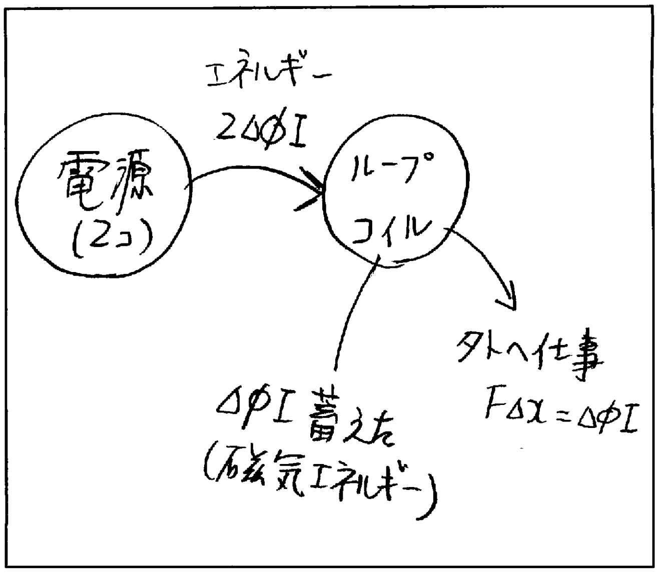
$$\Delta\phi'=\frac{I}{I_0}\Delta\phi$$

コイルの蓄えるエネルギーは、結局$\Delta W'=\Delta\phi' I_0=\Delta\phi I$となる。すなわち、ループが外部にする仕事量と全く同じ値になる。

注(省略可)：コイルの電源が供給するエネルギーは次のように考えても求めることができる。ループとともに移動している観測者からみると、ループが固定され、コイルが外部に仕事をしているように見える。このとき、作用反作用の原理から、コイルにはたらいている力は上述のFと同じであり、したがってコイルが外部にする仕事量も$F\Delta x$で、これはループのところで述べた計算により$\Delta\phi I$になる。しかし、今度はコイルにつないだ電源がこの仕事量を供給しているように見えるはずである。したがって、コイルの電源が供給するエネルギーは$\Delta\phi I$となる。

この考えのように、どちらの電源が外部に仕事をしているかというのは観測者によって異なる全く相対的なことになる。そこで、特に区別せずにまとめて、電源がコイルとループにそれぞれ$\Delta\phi I$（合計$2\Delta\phi I$）のエネルギーを供給し、そのうちの$\Delta\phi I$が外部への仕事になったと考えるだけで十分である。

以上によって得られたコイルとループのエネルギーの入出をまとめて図示すると右図のようになる。図ではループとコイルをひとまとめにし、電源(ループとコイルで合計 2 個)もまとめて表している。



結局、電源から $2\Delta\phi I$ が供給され、そのちょうど半分が外部への仕事に使われ、残り半分がコイルとループの系に蓄えられたことになる。いいかえると、コイルとループは電源からエネルギーをもらって、その 50%だけ仕事をし（効率 50%)、残りを磁気エネルギーとして空間に蓄えたのである。

磁気エネルギーが増えたことは、移動によってコイルとループの間の相互インダクタンス M が増加し、磁気エネルギー MI_0I_1 が増えたことからも分かる（もちろんこれも $\Delta\phi I$ と同じ値である)。

上図のようなエネルギーの入出は、ループやコイルの形状によらず一般的に成立つ結論である。
すなわち、磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の中で定電流 I のループが力を受けて移動し、鎖交磁束が $\Delta\phi$ だけ変化した場合、

- 電源（ループと $\boldsymbol{B}$ の発生源のコイルの電源）は全部で $2I\Delta\phi$ だけエネルギーを失う。
- ループと $\boldsymbol{B}$ の発生源のコイルを含む全体（ただし電源を除く）のエネルギーは $I\Delta\phi$ だけ増加する。
  この増加分は磁気エネルギーとして空間に蓄えられる。
- 電源まで含めた全体系のエネルギーは $I\Delta\phi$ だけ減少する。これは外部への仕事量になる。

次回、仮想変位の原理を使って磁気エネルギーによる力を計算するが、上の結論はその際に利用される。