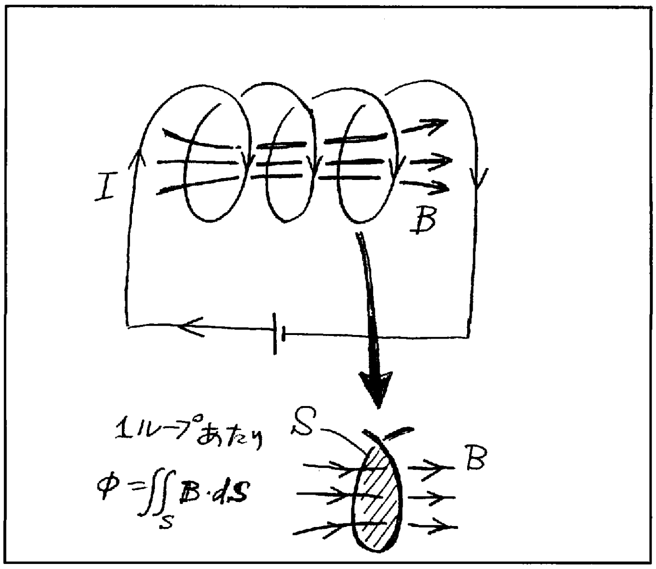
第７回

内容　インダクタンス

- **インダクタンス**
  - **自己インダクタンス、相互インダクタンス**
- **ベクトルポテンシャルによるインダクタンスの表現**
  - **相反定理、ノイマンの式**
- **インダクタンスの解析例**

インダクタンス

自己インダクタンスの定義



右図のように巻数Nのコイルの中のループ一つについての磁束をϕとすると

$$\phi = \iint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$$

コイル全体が貫いている(鎖交している)全磁束は

$$\Phi \equiv \sum_{ループ\ i} \phi_i = N\phi$$

これを鎖交磁束とよび、ひとつのループを貫く単なる磁束と区別する（前回でも簡単に説明した)。インダクタンスの計算ではこの鎖交磁束は非常に重要である。（注：上式の最後の項では、すべてのループの磁束が等しいと仮定しているため、ϕを単純にN倍したものが鎖交磁束になっている。個々のループの磁束が異なっている場合は和をきちんと計算する必要がある。）

コイルが、強磁性体などのように自発的な磁化を持つ材料を含まなければ、鎖交磁束はコイルの電流Iに比例する。つまりLを比例定数として$\Phi = LI$と書くことができる。このLを自己インダクタンスとよぶ。要するに自己インダクタンスの定義は

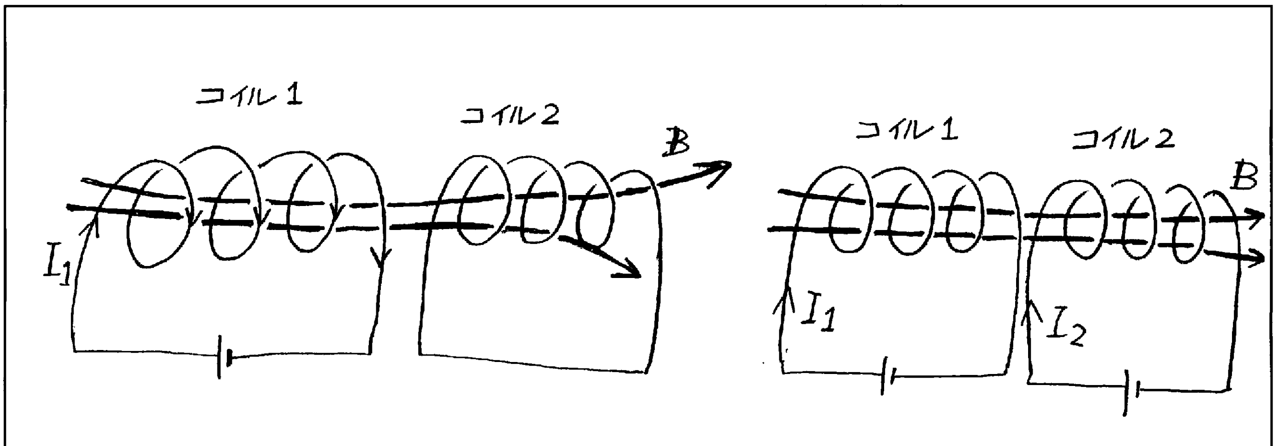
$$L = \frac{\Phi}{I}$$

電磁誘導との関係

巻数Nのコイルに発生する起電力は

$$V = N\times\left(-\frac{d\phi}{dt}\right) = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

すなわち起電力はコイルに流す電流の時間微分に比例する。その比例定数が自己インダクタンスとなる。$I = I_0\cos\omega t$のような交流を考える回路理論では、これを$\mathrm{Re}[I_0 e^{j\omega t}]$と書いて計算し、実部の記号Re[ ]は省略して表す。このような表示法(複素表示)で上式を表すと$V = -j\omega LI$となる。ただし、通常の回路理論では、コイルが外部に対して発生する起電力の代わりに、コイルに外から印加する電圧を用いるので電圧の符号が逆になり、$V = j\omega LI$となる。



(a) (b)

相互インダクタンスの定義

上図(a)のように、2つのコイル1と2を隣り合わせに置き、コイル1のみに電流I_1を流す。
I_1により発生した磁束のうちでコイル2の各ループを貫く磁束を合計した鎖交磁束をΦ_{21}とすると（添字の2と1はそれぞれ、コイル2を貫くコイル1による磁束という意味である。）
コイル2の各ループを貫く磁束がすべて同じ場合は、コイル2の巻数をN_2、各ループの磁束をϕとして、$\Phi_{21} = N_2\phi$と書ける。

強磁性体などのように自発的な磁化を持つ材料を含まなければ、この鎖交磁束Φ_{21}は電流I_1に比例するので、コイル2のコイル1に対する相互インダクタンスM_{21}が次式で定義できる。

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1}$$

コイル2のみに電流が流れている場合も、まったく同じようにして、コイル1のコイル2に対する相互インダクタンスM_{12}が定義できる。

上図(b)のように、コイル1とコイル2の両方にそれぞれ電流I_1とI_2が流れている場合には、各コイルを貫く磁束は重ね合わせになり、次のように表される。

コイル1を貫く鎖交磁束 $\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} = L_1 I_1 + M_{12} I_2$

Φ_{11}：1による鎖交磁束　Φ_{12}：2による鎖交磁束　L_1：1の自己インダクタンス　M_{12}：1の（2に対する）相互インダクタンス

コイル2を貫く鎖交磁束 $\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22} = M_{21} I_1 + L_2 I_2$

M_{21}：2の（1に対する）相互インダクタンス　L_2：2の自己インダクタンス

あとで示すが、強磁性体やμが磁力線の方向によって異なる異方性材料を含まなければ、2つの相互インダクタンスの間には$M_{12} = M_{21}$の関係がある（相反定理）。言い換えると、$I_1 = I_2$のとき$\Phi_{12} = \Phi_{21}$が成り立つということである。

上式を用いて起電力を表すと

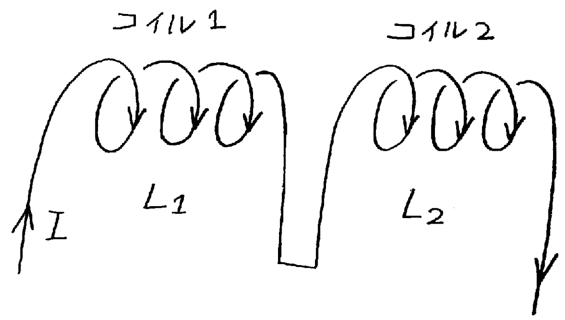
$$\begin{cases} V_1 = -\dfrac{d\Phi_1}{dt} = -L_1\dfrac{dI_1}{dt} - M_{12}\dfrac{dI_2}{dt} \\ V_2 = -\dfrac{d\Phi_2}{dt} = -M_{21}\dfrac{dI_1}{dt} - L_2\dfrac{dI_2}{dt} \end{cases}$$

インダクタンスの単位

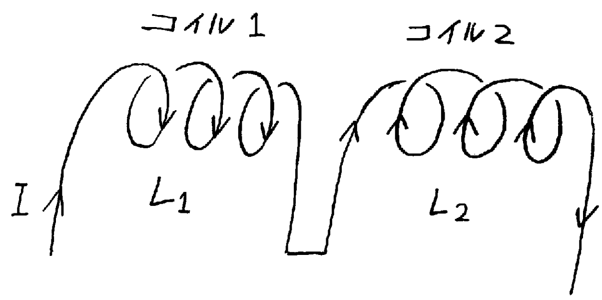
インダクタンス L と M の単位には[H](ヘンリー)を用いる。[H]では大きすぎる場合には、補助単位をつけて[mH] (=10^{-3}[H]), [μH] (=10^{-6}[H]), [nH] (=10^{-9}[H]), [pH] (=10^{-12}[H]), ...（補助単位はもっと小さいものまであるがインダクタンスの値には[pH]以下の値はほとんどないので省略する。あとの回で説明するが、直線の導線だけの場合でも自己インダクタンスが存在し、[pH]以下の小さいインダクタンスが出てくることは現実的にはまずないと考えてよい。）また、あとの例でわかるが、インダクタンスの計算結果は必ず $L = \mu \times [長さ]$ の形になっている。それで μ の単位を始めから[H/m]としているのである。

コイルの直列接続

自己インダクタンス L_1 と L_2 のコイル1と2を右図(a)のように直列に接続したら全体のインダクタンスはどのようになるか、ということについて説明する。以下に示すように、電気抵抗と違って $L = L_1 + L_2$ という単純なことにはならない。



(a)



(b)

上で示された定義に基づいて求めることができる。まず直列接続されているので $I_1 = I_2 = I$ とおくことができ､各コイルの鎖交磁束は

$$\begin{cases} \Phi_1 = L_1 I + M_{12} I \\ \Phi_2 = M_{21} I + L_2 I \end{cases}$$

したがってコイル全体の鎖交磁束は

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = (L_1 + L_2 + M_{12} + M_{21})I$$

となるので、全体の自己インダクタンスは

$$L = \Phi / I = L_1 + L_2 + M_{12} + M_{21} = L_1 + L_2 + 2M$$

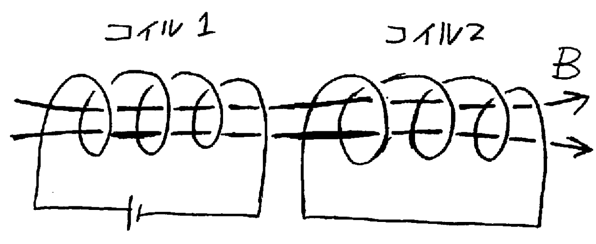
ただし、相反定理を用いて $M_{12} = M_{21} = M$ とした。このように相互インダクタンスのために、自己インダクタンスの単純な和にはならないのである。

上図(b)のようにコイル1と2の巻かれている方向が逆のときは

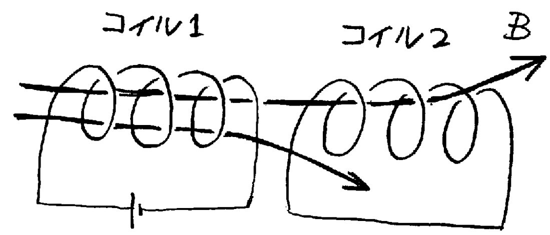
$$\begin{cases} \Phi_1 = L_1 I - M_{12} I \\ \Phi_2 = -M_{21} I + L_2 I \end{cases}$$

となるので（各自考えよ）、 $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = (L_1 + L_2 - M_{12} - M_{21})I$ となって、この場合は $L = L_1 + L_2 - 2M$ となる。

コイル間の結合度



(a) 完全結合

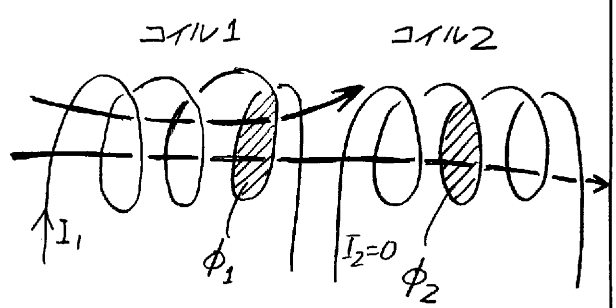


(b) 不完全結合

右図(a)のようにコイル1のつくる磁束がすべて2を貫くとき（この場合、相反定理からコイル2のつくる磁束もすべて1を貫く）、$L_1L_2 = M^2$ が成り立ち、この状態にある2つのコイルを完全結合(密結合)しているという。ほとんどこれに近い状態を作り出すことは可能であるが、通常は右図(b)のように一部の磁力線は結合しない不完全結合であり、$L_1L_2 > M^2$ となる。

$k = \dfrac{M}{\sqrt{L_1L_2}}$ というパラメータ（結合度、あるいは結合係数とよぶ）を用いると、完全結合は $k=1$ であり、完全結合と不完全結合をあわせて $k \le 1$ が成り立つ。

$L_1L_2 - M^2 \ge 0$ の導出

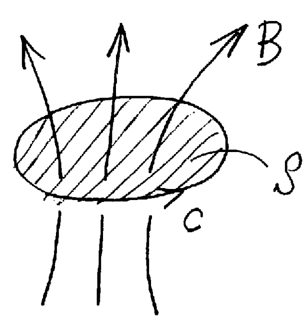


簡単な場合について説明する。磁界のエネルギーを用いて導出する方法もあり、あとの回で説明する予定である。まず、右図のように $I_2=0$ とし、コイル1の電流が作る磁束のうち、コイル1の中の1個のループを貫く磁束を ϕ_1、コイル2の中の1個のループを貫く磁束を ϕ_2 とすると、$\phi_1 \ge \phi_2$ は明らかに成り立つ。コイル1と2のそれぞれで各ループを貫く磁束が同じ場合を考えると $\phi_1 = \Phi_{11}/N_1$ および $\phi_2 = \Phi_{21}/N_2$ であるから $\Phi_{11}/N_1 \ge \Phi_{21}/N_2$ となる。次に $I_1 = 0$ とすると、まったく同様に $\Phi_{22}/N_2 \ge \Phi_{12}/N_1$ となる。これらの不等式の左辺どうしと右辺どうしの積から $\Phi_{11}\Phi_{22} \ge \Phi_{12}\Phi_{21}$、したがって $(L_1I_1)(L_2I_2) \ge (MI_1)(MI_2)$ が成り立ち $L_1L_2 \ge M^2$ が得られる。（注：積をつくる前の2つの不等式からそれぞれ独立に $L_1 \ge M$ および $L_2 \ge M$ と結論することはできない。N_1 と N_2 が含まれているので。）

ベクトルポテンシャルによるインダクタンスの表現

インダクタンスをベクトルポテンシャルで表す。まず、1回巻だけのコイルを考えると、この場合は通常の磁束と鎖交磁束が同じであるから、右図を参照して

$$\phi = \Phi = \iint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = \iint_S \mathrm{curl}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{\ell}$$



したがって自己インダクタンスは

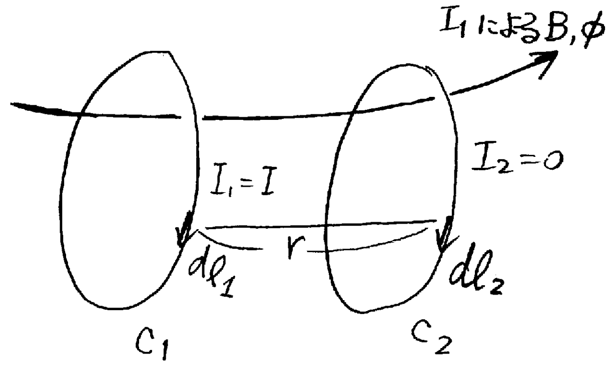
$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{1}{I}\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{\ell}$$

ベクトルポテンシャルの線積分はコイルに沿った線積分である。巻数が一回でないときでも、上式の線積分を巻いているすべての部分に沿った線積分と考えれば、まったく同じ式により、自己インダクタンスが表される。

相反定理

以上のようにベクトルポテンシャルにより自己インダクタンスを表すことができたが、これと同じ方法により相反定理を導くことができる。

右図のように、隣接した2つのコイルを考える。（簡単のため、1ループのみのコイルを考えているが、巻数が1回以上でも同じことである。）



まず、$I_1=I$ および $I_2=0$ とすると

コイル2を貫く鎖交磁束は

$$\Phi_{21}=\oint_{C_2}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{\ell}_2$$

この式の$\boldsymbol{A}$はコイル1の電流がコイル2の線上につくるベクトルポテンシャルであり、次式で表すことができる。

$$\boldsymbol{A}=\oint_{C_1}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\boldsymbol{\ell}_1}{r}$$

したがって

$$\Phi_{21}=\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{d\boldsymbol{\ell}_1\cdot d\boldsymbol{\ell}_2}{r}I$$

次に$I_1=0$および$I_2=I$とすれば、まったく同様に（上式で添字1と2を入れ替えればよい）

$$\Phi_{12}=\oint_{C_2}\oint_{C_1}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{d\boldsymbol{\ell}_2\cdot d\boldsymbol{\ell}_1}{r}I$$

これは数式上で積分の順序が変わっただけでまったく同じものであるから、結局$\Phi_{21}=\Phi_{12}$が成り立ち、

したがって$M_{21}=\dfrac{\Phi_{21}}{I}=\dfrac{\Phi_{12}}{I}=M_{12}$が得られる。

ノイマンの式

上で得られたベクトルポテンシャルによる自己インダクタンスをもう一度きちんと書くと

$$L_1=\frac{\Phi_{11}}{I_1}=\frac{1}{I_1}\oint_{C_1}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{\ell}_1$$

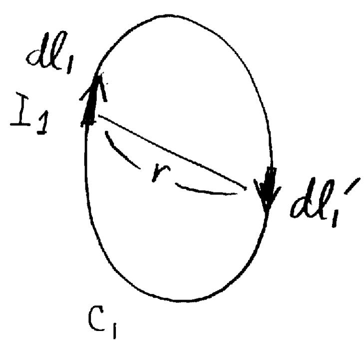
電流I_1のつくるベクトルポテンシャルは右図(a)を参照して、$\boldsymbol{A}=\oint_{C_1}\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I_1d\boldsymbol{\ell}'_1}{r}$となるので、結局

$$L_1=\oint_{C_1}\oint_{C_1}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{d\boldsymbol{\ell}_1\cdot d\boldsymbol{\ell}'_1}{r}$$

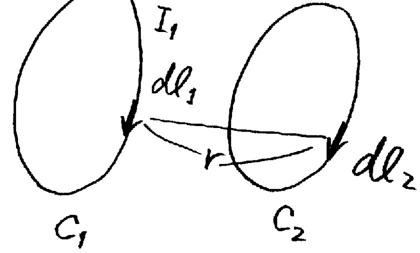
右図(b)を参照してまったく同様に

$$M_{12}=M_{21}=\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{d\boldsymbol{\ell}_1\cdot d\boldsymbol{\ell}_2}{r}$$

これで自己インダクタンスと相互インダクタンスの



(a)



(b)

一般的な式が得られたことになる。これらはノイマンの式とよばれている。これらの式から、インダクタンス L と M はコイルに流す電流をまったく含んでおらず、コイルの形状だけから決まる定数であることがわかる。また、相反定理 $M_{12}=M_{21}$ が成り立つこともこの式をみればすぐにわかるが、これは既に述べた。

結局インダクタンスが上のようなノイマンの式で表されることがわかったので、これらの式にしたがってコイルに沿った線積分を行うだけでインダクタンスが計算できそうに思われる。つまりあとは計算問題だけになったように思われる。もちろん、そうやって解くことができる問題もある。ところが、実際はこれらの式は実用上あまり便利な式ではない。とくに自己インダクタンス L_1 の式は、線積分において $d\boldsymbol{\ell}_1$ と $d\boldsymbol{\ell}'_1$ が同じループ上にあるので $r=0$ となる場合が必ず生じる。このため、式のまま積分すると $d\boldsymbol{\ell}_1 \cdot d\boldsymbol{\ell}'_1/r$ が発散してしまうので、これを回避するために数式上で工夫をしなければならないことがある。したがって、実際のインダクタンスの計算には、すぐあとで説明するように、鎖交磁束を計算して定義どおりに求めたほうがよい場合が多い。

インダクタンスの解析例

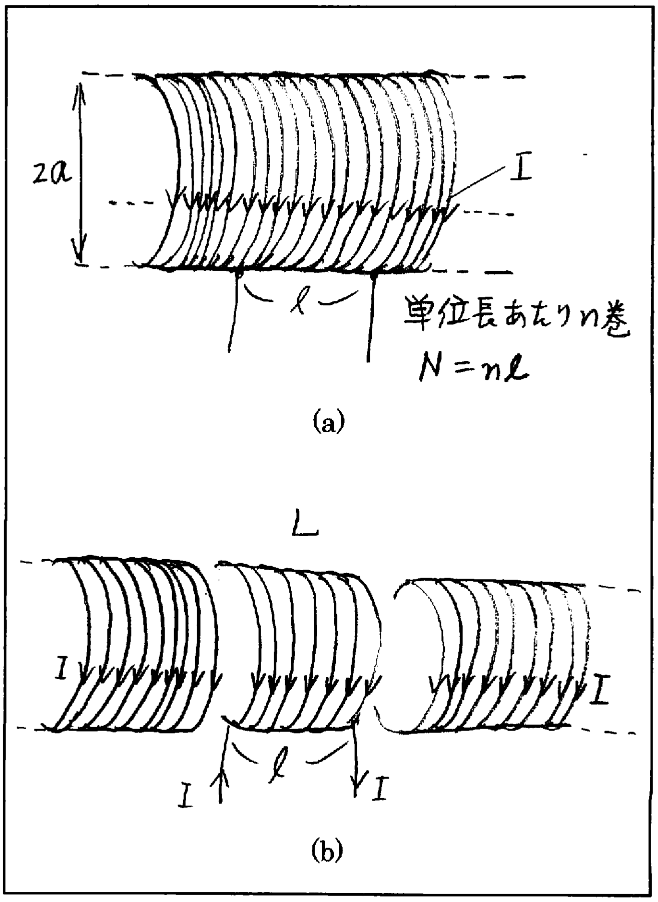
計算手順

定義どおりに求めるのがいちばん計算しやすい。すなわち、コイルの形状が与えられたとして、それに電流 I を流すと考え、$I \to B \to \phi \to \Phi \to \Phi/I = L$ or M　の順に計算する。$I \to B$ のプロセスにはこれまでに述べてきたアンペアの法則やビオ･サバールの式を使えばよい。また、この手順の中で $\phi \to \Phi$ の部分（磁束から鎖交磁束を求める部分）を忘れないように注意すること。上に述べたようにノイマンの式はあまり使わない。（相互インダクタンスでは使うと計算しやすい場合もあるが。）

例

(1) 無限長ソレノイド

右図(a)のように無限長ソレノイド全体に電流 I を流したとき、ソレノイド中の間隔 ℓ の 2 点間の自己インダクタンスを求める。あるいは右図(b)のように、長さ ℓ のソレノイドの両側に半無限のソレノイドが密着して置かれており、すべてのソレノイドに同じ電流 I が流された状態で、中央のソレノイドの自己インダクタンスを求める問題と考えてもよい。ソレノイドの半径を a、巻数を単位長さあたり n、長さ ℓ の部分の巻数 $n\ell \equiv N$ とする。



(a)　(b)

上で述べたように定義に従って計算する。まず、ソレノイド中の磁束密度は（すでにアンペアの法則のところで説明した。教科書では p.160）、

$$B=\mu_0 nI=\mu_0\frac{N}{\ell}I$$

この磁束密度による磁力線はソレノイドの軸に平行になっている。磁束は

$$\phi = B\pi a^2 = \mu_0 \frac{N}{\ell} I\pi a^2$$

ソレノイド中のすべてループに対して磁束は同じ値になるので、長さℓの部分の鎖交磁束は

$$\Phi = N\phi = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} I\pi a^2$$

したがって、自己インダクタンスは

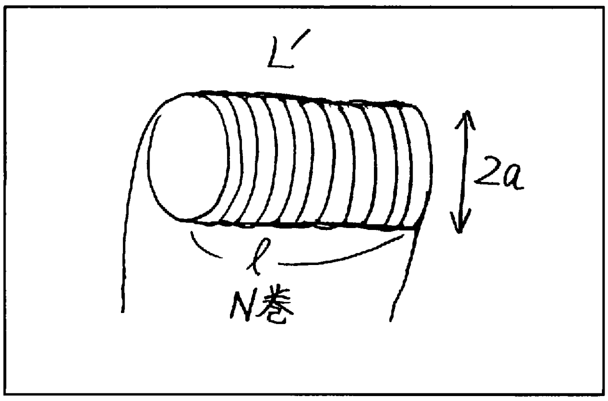
$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi a^2$$

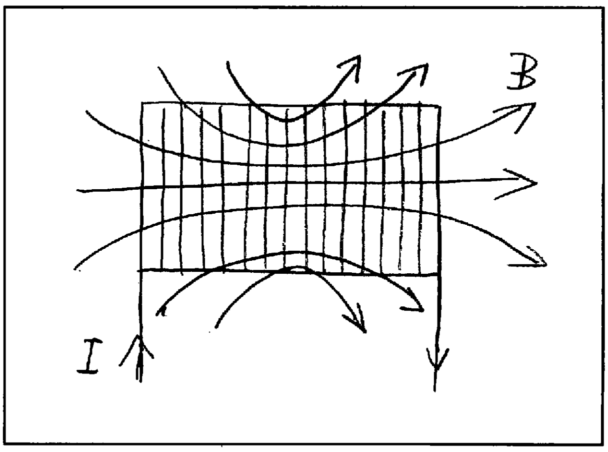
この式のように自己インダクタンスは$L \propto N^2$となっている。

また、単位長さあたりの自己インダクタンスは

$$L_0 = \frac{L}{\ell} = \mu_0 n^2 \pi a^2$$

(2) 有限長ソレノイド





上述のような無限長ではなく、ソレノイドが有限長の場合(右図)の自己インダクタンスについて考えてみよう。(あるいは上図(b)において両側の半無限ソレノイドを取り去った場合と考えてもよい。) ソレノイドの半径と長さは前の例と同じくaおよびℓとする。

さて、この場合の自己インダクタンスL'は前の例の無限長ソレノイドの中の長さℓの自己インダクタンスLに比べてどうなるだろうか。つまり$L < L'$だろうか$L > L'$だろうか、それとも$L = L'$だろうか。

これについては次のように考えることができる。右図のようにソレノイドが有限の場合は内部の磁力線は軸に平行になっておらず、一部は途中からソレノイドの外へ出てしまう。したがって、ソレノイドの端にあるループを貫く磁束は中央のループを貫く磁束より小さい。有限長と無限長で同じ電流を流した場合を考え、有限長ソレノイドの鎖交磁束をΦ'、無限長の場合をΦとすると

$$\Phi' = \sum_{\text{ループ}\,i} \phi'_i < \Phi = \sum_{\text{ループ}\,i} \phi_i = N\phi$$

したがって

$$L' = \frac{\Phi'}{I} < \frac{\Phi}{I} = L$$

すなわち、有限長のソレノイドのほうが自己インダクタンスは小さい。

無限長に比べて小さいことはわかったが、それではL'の値そのものはどのようになるか？これについても、上に述べた手順どおりに計算すればよいのだが、この計算を実際行うと、楕円積分という特殊関

数が出てくるなどやや複雑になるので、ここでは計算の詳細は省略して、結果だけ概略的に述べる。

有限長の場合の自己インダクタンスL'は、無限長の中の長さℓの部分の自己インダクタンスLを用いて次式で表すことができる。

$$L' = \mathcal{L} \times L$$

ただし$\mathcal{L}$は$\mathcal{L} < 1$となる係数で、長岡係数とよばれる。$\mathcal{L}$はソレノイドの直径と長さの比$2a/\ell$の関数であり、具体的な計算は上述のように複雑である。$\mathcal{L}$の数値は教科書 p.207 にあるが、たとえば

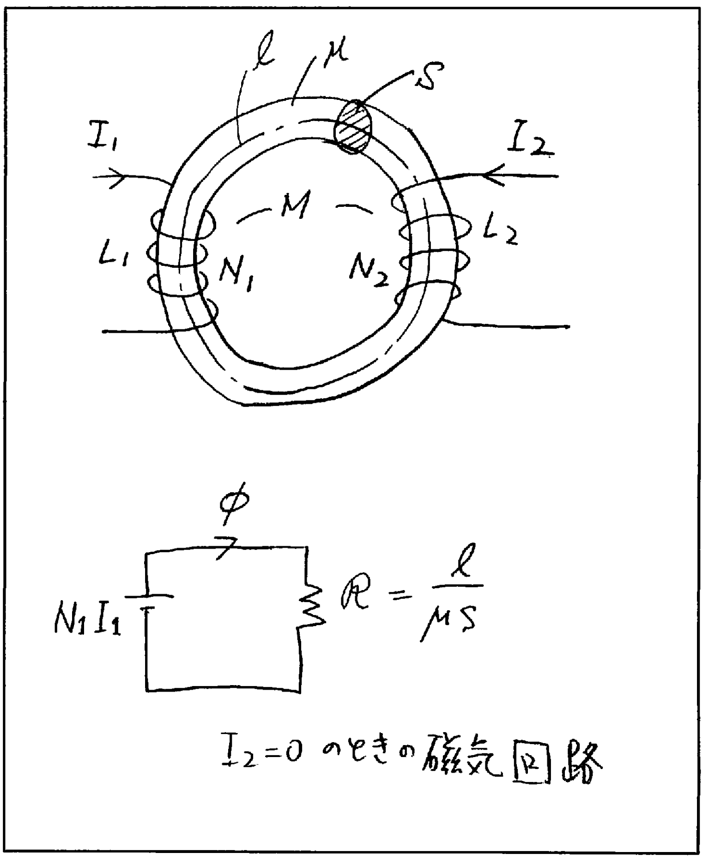
$$\begin{cases} \dfrac{2a}{\ell} \to 0 \text{ のとき } \quad \mathcal{L} \to 1 \\ \dfrac{2a}{\ell} = 1 \text{ のとき } \quad \mathcal{L} \simeq 0.7 \end{cases}$$

余談

係数$\mathcal{L}$は物理学者 長岡半太郎博士により導出されたのでこのようによばれている。長岡博士は東京帝国大学の教授で明治から昭和初期にかけて、日本の物理学界を世界的レベルに高めるために人材育成などの推進力となった人であり、みずからも、磁気歪み現象の測定や、原子構造として陽子の周りを電子が回っているモデルを提唱するなど、当時の世界的水準で見ても顕著な業績を上げている。自己インダクタンスの計算のような仕事は、現在では工学の分野の仕事で、純粋な物理学から見るとかなり離れている感があるが、当時は大きな区別はなかったのかもしれない。

(3) 鉄心に巻いた 2 つのコイル

右図のように鉄心に巻かれた 2 つのコイルの自己インダクタンスと相互インダクタンスを求める。巻数はそれぞれN_1とN_2、鉄心は透磁率μ、断面積S、周の長さℓで、断面の寸法は周の長さに比べて非常に小さい。



まず、コイル 2 の電流$I_2 = 0$とする。磁気回路(右図)を用いた計算により、鉄心注の磁束は

$$\phi = \frac{N_1 I_1}{\mathcal{R}} = \frac{\mu S N_1}{\ell} I_1$$

コイル 1 の鎖交磁束は$\Phi_{11} = N_1 \phi$であり、したがってコイル 1 の自己インダクタンスは

$$L_1 = \frac{\Phi_{11}}{I_1} = \frac{\mu S N_1^2}{\ell}$$

コイル 2 の鎖交磁束は$\Phi_{21} = N_2 \phi$であり、コイル 1 と 2 の間の相互インダクタンスは

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu S N_1 N_2}{\ell}$$

次にコイル 1 の電流$I_1 = 0$としてI_2のみとすれば、上とまったく同様の計算により（あるいは上の結果で添字 1 と 2 を入れ替えるだけでもよい）、

$$L_2 = \frac{\mu S N_2^2}{\ell} \quad \text{および} \quad M_{12} = \frac{\mu S N_2 N_1}{\ell}$$

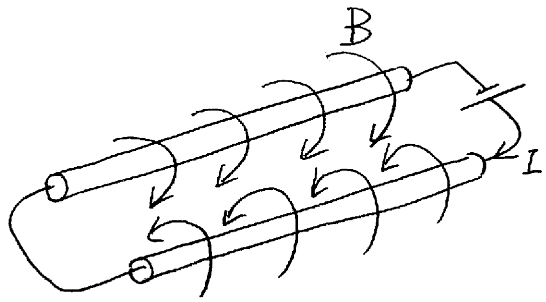
上の結果をみると $L_1 \propto N_1^2$、$L_2 \propto N_2^2$ となっている（巻数そのものに比例するのではない）。これは、前に述べた直列接続のインダクタンスが単純に和にならないことと同じ理由である。また、$M_{21} = M_{12} \propto N_1 N_2$ が成り立っている。さらに、$L_1 L_2 - M^2 = 0$（完全結合）が成り立っている（$M_{12} = M_{21} = M$ とおいた）。これは磁束 ϕ が鉄心の外へもれないことを仮定しているためである。μ が μ_0 より十分大きければほぼ成り立っていると考えてよい。

(4) 平行導線の回路

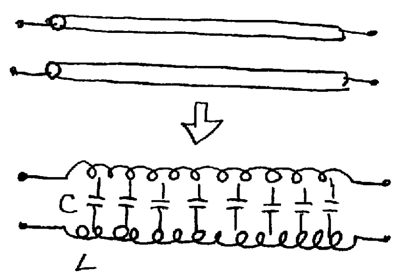
右図(a)のような平行導線の回路において、平行導線部分のみのインダクタンス（つまり平行導線の発生する磁力線だけから求めたインダクタンス）はどのようになるか。

この具体的な計算は演習で行う予定である。

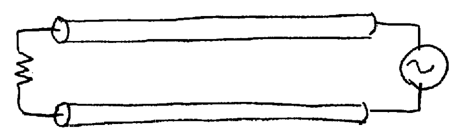
このような平行線路は電気回路の記号で書くと右図(b)のようになっており、このインダクタンスと講義前半で計算した静電容量が、平行線路に沿って分布していることになる。このような回路は、コイルやコンデンサが集中して 2 点間に接続されているのではないので、分定数回路あるいは分布定数線路とよばれる。一方の端から交流信号を送り込み他方から取り出すとき(右図(c))、回路としてはこのような分布定数線路で解析する（伝送線路解析）。電磁気学的には平行線路の間を電気エネルギーと磁気エネルギーが伝わっていくとして解析でき、これは回路で解析するのを別の方法で行っただけのまったく同じものである。このあたりは、あとの回で電磁波の伝搬の一例として説明する予定である。



(a)



(b)



(c)

(5) 同軸線路

下図のように同軸線路を含む回路において、同軸線路部分のみのインダクタンスはどうなるか。（詳しくいうと、同軸の中心線を通って電源端から他端へ行き、外側を通って戻ってくる回路において、同軸部分の発生する磁力線だけから求めたインダクタンス。）

これも具体的な計算は演習で行うであろう。

これも上で述べた平行線路と同じ分布定数線路のひとつである。平行線路と同じように、伝送線路としてよく使われている。