**第６回**

**内容　電磁誘導**

- **電磁誘導と基本方程式**
- **ローレンツ力**
- **ポテンシャルによる基本方程式の表現**
- **まとめ**
- **電磁誘導の実例**

この内容は教科書の第 14 章前半にあたる。第 13 章のインダクタンスはこのあとのほうがわかりやすいと判断して順序を入れ替えた。

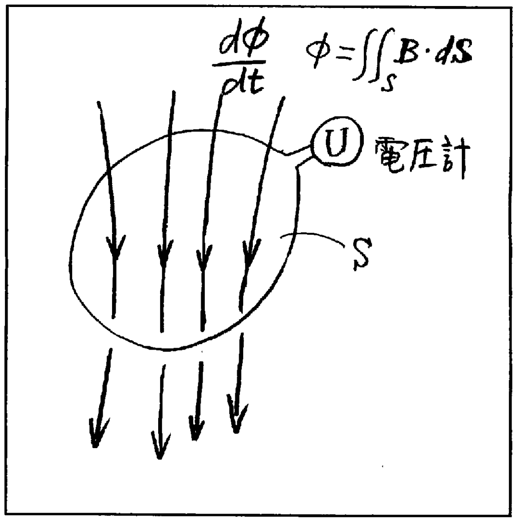
---

**電磁誘導**

**ファラデーの実験　（ロンドン 1831）**

これまで述べてきた電流と磁束密度の関係は、定常電流が磁束密度を発生するというものであったが、ファラデーは逆に磁気から電流が発生できないだろうかという研究を行い、さまざまな実験の末、次の結論に到達した。

コイルに発生する起電力（これについてはすぐあとで説明する）は、コイルを貫く磁束の時間変化の割合に比例する（右図）。




起電力$U$と磁束$\phi$の単位をそれぞれ[V](ボルト)および[Wb](ウェーバ)として、式で表わすと

$$U=-\frac{d\phi}{dt}$$

これはファラデーの電磁誘導の法則として知られている。（数式で表わしたのはノイマンである。）すなわち、$d\phi/dt$の方向に対して反時計回りに電流を発生させるような起電力が発生する。定常的な磁束ではなく時間変化という点に着目したのがファラデーの発見の重要な点である。

**起電力**

上式の起電力$U$とは、具体的にはコイルにつないだ電圧計の示す電圧である。$d\phi/dt$によってコイルに電流を流す何らかの力（これを起電力と呼んだ）が発生したのを電圧として表わしているのである。しかし、もう少し詳しく考えると、電流が流れるということはコイル(導線)中の電荷が動くのであるから、コイルに沿って電界が発生しており、その積分が電圧として観測されていると考えるのが妥当である。つまり

$$U=\oint_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{\ell}$$

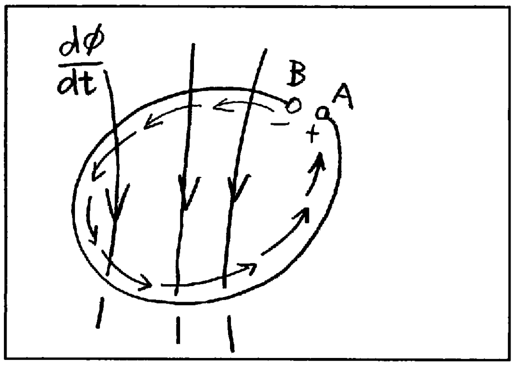
ただし、C はコイルに沿った周回積分を表わす。積分がコイルを一周する周回積分であるという点が重要である。このことから、コイルに発生した電界は静電界とは異なる性質を持つ電界であることになる。なぜなら、静電界ならば$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{\ell}=0$であるから。　そして、起電力$U$も、単位はボル

トであるが、静電界の電位や電位差とは異なる物理量である。

コイルに発生する電界は、静電界と区別して誘導電界とよぶ。ただし、電荷に力を及ぼすという点では静電界とまったく同じであり、周回積分してみなければ区別はできない。

---

もし電圧計が、電流が流れない計器であれば、上述の起電力を測定する実験は、厳密には次のように考えないといけない。このような電圧計をコイルにつないだとしても閉回路にはなっていない(右図。端子 AB が電圧計)。すると、電磁誘導によりコイルに沿って電界が発生した場合、コイル内の電荷は電界によって右図の A 端子に集まる。したがって、A 端子と B 端子は正負電荷の集中した点となるので、両端子間に静電界が発生する。この静電界による電位差を電圧計で測定したと考えるのが正しい。




すなわち、AB 端子間の電位差は $V_{\mathrm{BA}} = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{\ell}$ （この $\boldsymbol{E}$ は静電界であり、積分は A から B までどのような経路でもよい）であり、一方、起電力は $U_{\mathrm{BA}} = \int_{\mathrm{C(A \to B)}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{\ell}$ （この $\boldsymbol{E}$ は誘導電界であり、積分はコイルに沿う積分に限定）で、両者がつりあっている。電位差の定義に負号がついているのに、起電力にはそれがないのは、端子間起電力を外部から測定するという立場で定義されているためであるが、上述のように静電界と誘導電界が混在する場合をうまく表現できている。

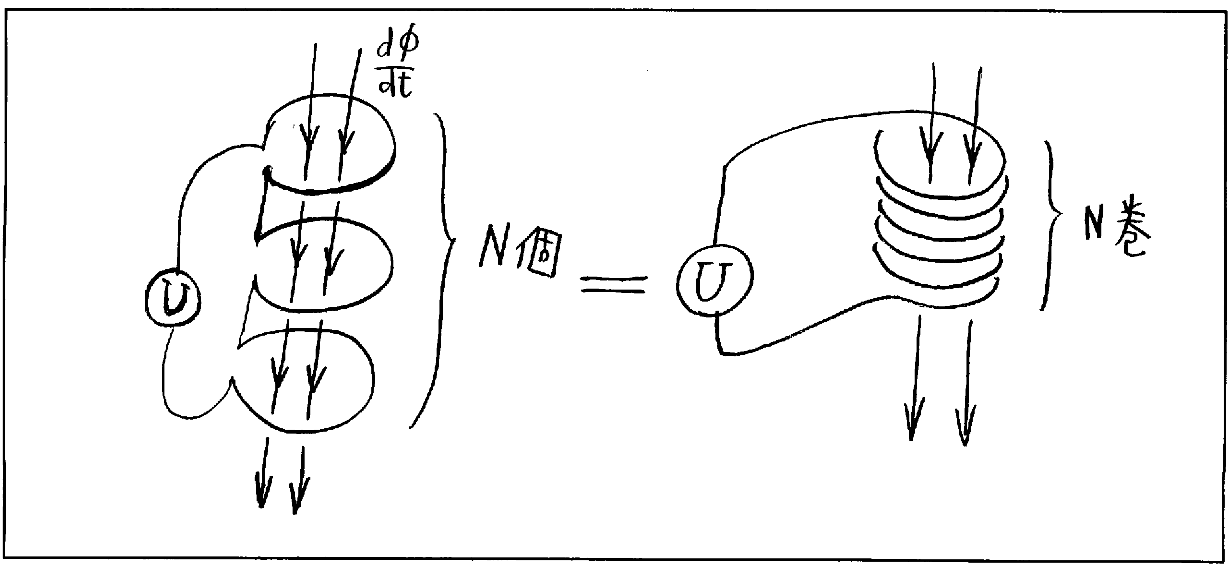
---

### 直列のコイルの起電力

コイルが $N$ 個直列につながれている（いいかえれば $N$ 回巻きのコイル）ならば、コイルひとつあたりの磁束を $\phi$ として、全起電力は

$$U = -N\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(N\phi) \equiv -\frac{d}{dt}\Phi$$

ただし、$\Phi = N\phi$ はコイル全体を貫いている磁束の総量を表わしており、コイルの鎖交磁束とよばれている。この鎖交磁束は後の回でインダクタンスを計算する際に用いられる重要な量になる。



**基本方程式**

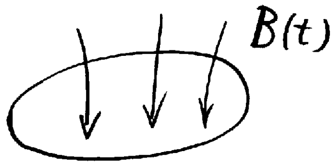
ここでは、ファラデーの電磁誘導の法則から、磁束密度と誘導電界の間の基本方程式を導出する。簡単のため、1 回巻きコイルだけを考える（$N=1$）。ファラデーの法則は

$$U = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$$

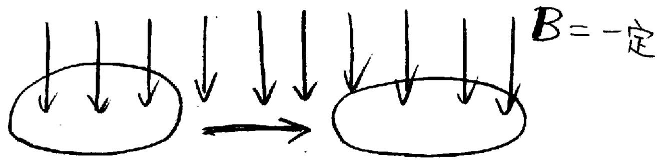
右辺にある時間に関する微分の計算は、次の 2 通りの場合について分けて考える必要がある。

$\dfrac{d\phi}{dt}$

①コイルは実験室に固定されている。 $\boldsymbol{B}$そのものが時間的に変化する、つまり $\boldsymbol{B}(t)$。




②コイルの位置が時間とともに変化（つまりコイルが移動する）。 $\boldsymbol{B}$は一定。




それぞれ別々に考えていく。

① コイルが固定され、$\boldsymbol{B}$が変化する場合。

ファラデーの法則は次のように書き換えられる。

$$U = -\frac{d}{dt}\iint_S \boldsymbol{B}(t)\cdot d\boldsymbol{S} = \iint_S \left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S}$$

$U = \oint_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{\ell}$ を用いると $\displaystyle\oint_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \iint_S \left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S}$

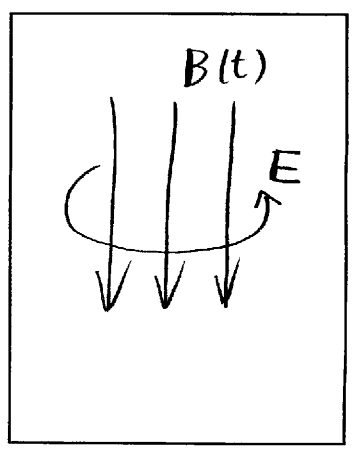
これが誘導電界と磁束密度の関係を表わす基本方程式(積分表現)である。

ベクトルのうずに関するストークスの定理を用いると

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

これが基本方程式の微分表現である（積分表現からの導出は各自に任せる）。

ここで注意すべきこととして、上のようにして得られた基本方程式はコイル(導線)が存在してもしなくても、空間に磁束密度があれば常に成り立つ式であるということである。つまり、空間に存在する磁束密度が時間的に変化すると、その空間に誘導電界が発生する。これは導線がそこにあってもなくても起こる現象であり、たまたま導線を置けばこの現象が起電力として観測されるということである。




ファラデーの法則はもちろんコイルを使って発見されたのであるが、含まれている内容は、このようにコイルから離れて、空間の性質を表わしていると考えるのである。

すでに述べたが、このようにして発生する誘導電界が静電界と異なることは、この基本方程式でベクトルのうずが 0 でないことから明らかである。つまり、電荷が作る静電界 $\boldsymbol{E}_s$ に対しては $\mathrm{curl}\boldsymbol{E}_s = 0$ が成り立ち、誘導電界（改めて $\boldsymbol{E}_i$ と書く）に対しては $\mathrm{curl}\boldsymbol{E}_i = -\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ が成り立つ。電界にはこれら 2 種類があり、一般的な電界はこれらの和 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_s + \boldsymbol{E}_i$ で表される。したがって静電界と誘導電界の両方を含む一般的な電界に対して、基本方程式 $\mathrm{curl}\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ が成り立つ。

次に②のコイルが移動する場合について考える。こちらの場合からは導線中の電荷にはたらくローレンツ力が導かれることが示される。

## ローレンツ力

上の続きとして②のコイルが移動する場合。（$\boldsymbol{B}$ は時間的に一定とする。）
ファラデーの法則は次のように書きかえられる（右図(a)参照）。

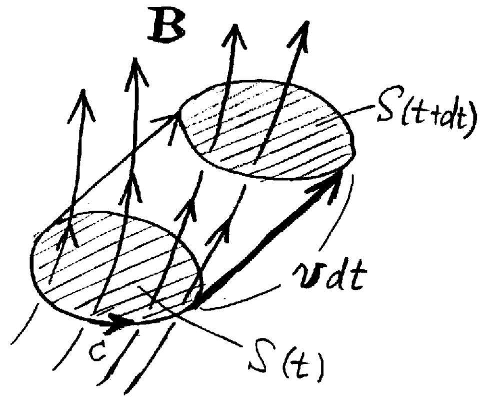
$$U = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\iint_{S(t+dt)}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} - \iint_{S(t)}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}}{dt}$$

つまり、時間 $dt$ の間に起きた磁束の変化は、コイルの面が $S(t)$ から $S(t+dt)$ に移動したことによって生じている。

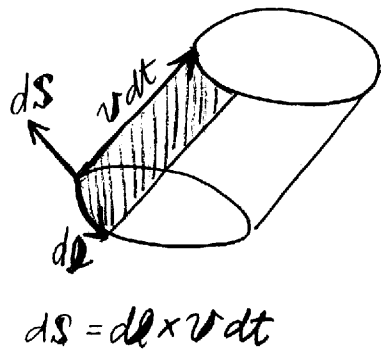
$S(t)$ と $S(t+dt)$ を底面とする円筒を考えると、この円筒の全表面に対して、磁束密度に関する基本方程式 $\oiint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = 0$ （$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$）が成り立つので、上式の右辺の分子は、右図(b)を参照しながら、次のように変形できる。

$$\begin{aligned}\iint_{S(t+dt)}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} - \iint_{S(t)}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} &= -\iint_{\text{円筒側面}}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}\\ &= -\oint_{\mathrm{C}}\boldsymbol{B}\cdot(d\boldsymbol{\ell}\times\boldsymbol{v}dt)\\ &= -\oint_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{\ell}dt\end{aligned}$$

ただし、側面の面積素片 $dS$ をコイルの移動速度 $\boldsymbol{v}$ とコイルに沿う線素片 $d\boldsymbol{\ell}$ で表わし、面積分をコイルに沿う線積分に変換している。これをもとの式に代入すると



(a)



(b)

$$U = \oint_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{\ell}$$

$U = \oint_{\mathrm{C}}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{\ell}$ を用いると、誘導電界と磁束密度の関係として次式が得られる。

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

コイルが移動する②の場合については、次の点を注意する必要がある。①で得られた基本方程式は、最終的にはコイルの存在には関係なく空間に対して成り立つ方程式と考えられた。しかし②の場合は、$\boldsymbol{B}$ は時間的に一定であり、空間に何か起こっているとは考えにくい。空間に何か起こっているのではなく、移動しているコイル(導線)の中の電荷だけが $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ という量を電界 $\boldsymbol{E}$ と感じていると考えられる。実験室に静止している観測者(あるいは電荷)には、何の変化も感じられないはずである。

すなわち、速度 $\boldsymbol{v}$ で運動している電荷 $e$ の粒子には次の運動方程式が成り立つと考えてよい。

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=e\boldsymbol{E}=e(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$$

この式の中の $\boldsymbol{E}$ は、移動中の電荷だけが感知している電界である。これとは別に、もともと電界が存在する（つまり静止している電荷にも感じられる電界が存在する）ときにはその電界による力も加算して、次式のように表される。

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=e(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$$

右辺がローレンツ力とよばれる力である。

以上の①+②の起電力をまとめて表すと

$$U=\oint_{\mathrm{C}}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{\ell}=\underbrace{\iint_{S}\left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S}}+\underbrace{\oint_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{\ell}}$$

①空間に、電界 $\boldsymbol{E}$ が実際に発生。　　②空間には変化は何もない。コイル中の電荷のみが感じる。

注：磁束密度の時間変化もコイルの移動も同時に存在する場合には、このように①と②にはっきり分けられないこともある。その場合はもとの式 $U=-d\phi/dt$ に戻って考える必要がある。

## ポテンシャルによる基本方程式の表現

磁束密度が時間的に変化する場合の基本方程式 $\mathrm{curl}\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ をベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ とスカラポテンシャル $V$ を使って表しておく。$\boldsymbol{B}=\mathrm{curl}\boldsymbol{A}$ を用いると

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{curl}\boldsymbol{A})=\mathrm{curl}\left(-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)\qquad \text{すなわち}\qquad \mathrm{curl}\left(\boldsymbol{E}+\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=0$$

したがって、$\boldsymbol{E}+\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ は任意のスカラ関数の勾配(grad)で表される。この式は $\boldsymbol{E}$ が静電界のみを含むときにも成り立つので、スカラポテンシャル(電位) $V$ を用いて $\boldsymbol{E}+\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}=-\mathrm{grad}\,V$ とおける。すなわち　$\boldsymbol{E}=-\mathrm{grad}\,V-\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$

第 1 項と第 2 項がそれぞれ静電界と誘導電界を表している。これがポテンシャルで表した基本方程式である。

**まとめ**

**ファラデーの電磁誘導の法則**

起電力 $U = -\dfrac{d\Phi}{dt}$　　鎖交磁束 $\Phi = N\phi$

静電界
$\mathrm{curl}\boldsymbol{E}_s = 0$

誘導電界
$\mathrm{curl}\boldsymbol{E}_i = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$

ローレンツ力
$m\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$

**基本方程式**

$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_s + \boldsymbol{E}_i$ に対して

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

**ポテンシャルを**
**用いた基本方程式**

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\, V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

**電磁誘導の実例**

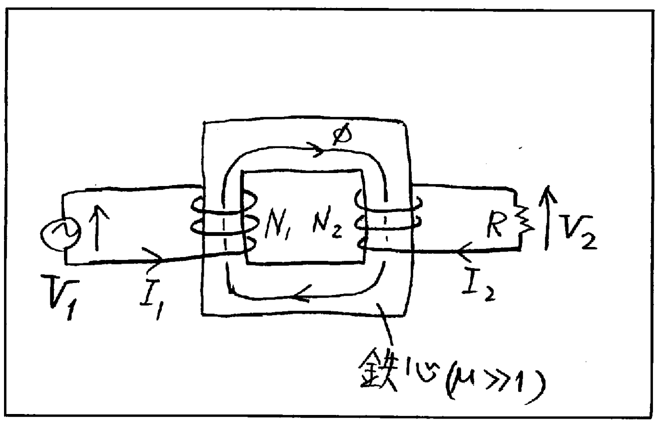
以上に述べた電磁誘導の実例をいくつか列挙する。

①コイルが固定され、磁束密度自体が時間的に変化する場合の実例

(1) 変圧器、変成器

右図のように鉄心に2つのコイル(1次側と2次側)を巻いて、1 次側に交流電圧を印加すれば2次側にも交流電圧が発生する。(原理は上述の説明からすぐ理解できる。各自考えよ。)

2 次側に抵抗(負荷抵抗)をつなげば、抵抗がエネルギーを消費するから、1次側から2次側へエネルギーを送り込んだことになる。

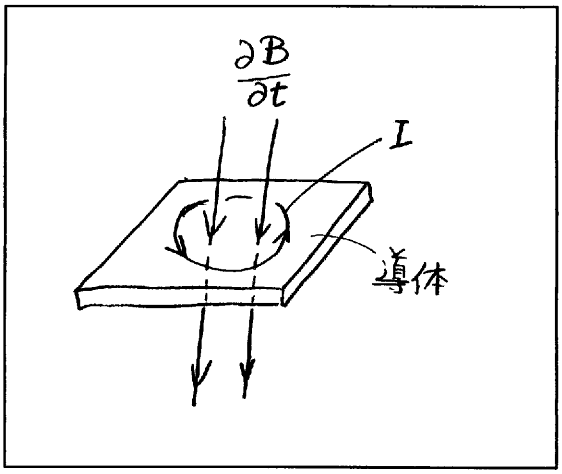


あとの回でインダクタンスのところで説明するが、2次側に発生する電圧（起電力）は

$V_2 = -\dfrac{d\Phi_2}{dt} = -M\dfrac{dI_1}{dt} - L_2\dfrac{dI_2}{dt}$ と表される。（$M$と$L_2$はインダクタンスとよばれる定数である。あとで詳しく説明するので、今は話だけ。）鉄心外部に磁力線がほとんど漏れないときには、1次側と2次側の電圧の間には$\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{N_1}{N_2}$の関係がある。ただし$N_1$と$N_2$は1次コイルと2次コイルの巻き数である（これもあとで出てくる)。これによって、電圧を変換して1次側のエネルギーを2次側へ伝送することができる。いうまでもないが、変圧器(トランス)として使われている。

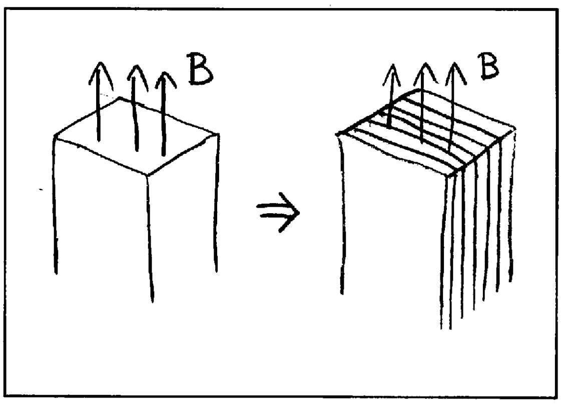
(2) うず電流

右図のように導体板を貫く磁束密度が時間的に変化すると、導体板中に電流が発生する(うず電流)。導体版には電気抵抗があるのでエネルギーを消費する（うず電流損)。




磁束密度が振幅$B$、角周波数$\omega$で周期的に変化する場合、導体板の導電率を$\sigma$とすると、この消費電力は$\omega^2B^2\sigma$に比例する（各自導出せよ)。

このエネルギー消費は積極的に利用できることもあれば（たとえば電熱器や電気的接続なしに電力を送り込むなど)、また逆に弊害となることもある。上の(1)で述べた変圧器では、鉄心の中を磁力線が通っているので、このうず電流は鉄心のすべての場所で発生し、エネルギーを損失してしまう。したがって1次側から2次側へ起こりこむエネルギーに損失が生じてしまう。すると交流で変圧しながら電力伝送するのは相当な損失になるのかというと、そうではなくて問題ないように工夫されている。鉄心の塊を使う代わりに、磁力線に平行にスライスした薄い板を絶縁性の接着剤で張り合わせた構造にすれば（右図）うず電流が流れにくくなり、損失は抑えられる。

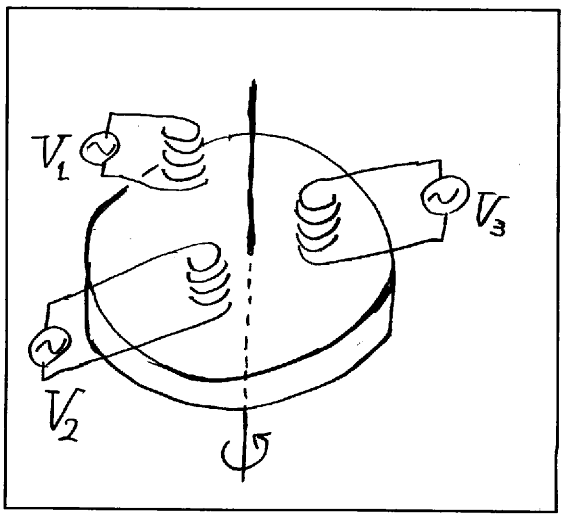



(3)交流電動機

図のように中心軸の周りに回転できる導体円板の上方に3つのコイルを正三角形の位置に配置し、それぞれに次のような電圧(三相交流電圧)を加える。

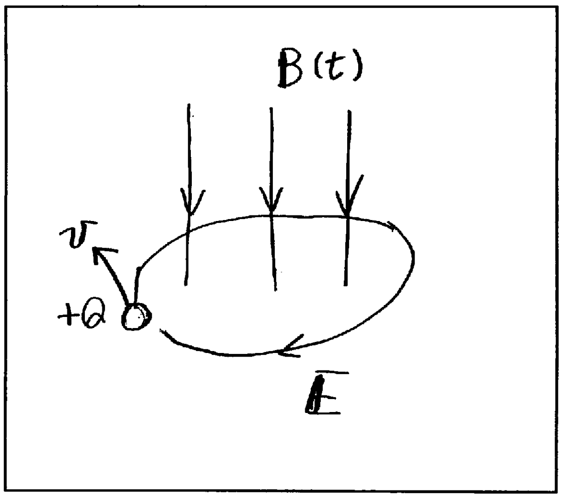
$$\begin{cases} V_1 = V_0 \sin\omega t \\ V_2 = V_0 \sin(\omega t + 2\pi/3) \\ V_3 = V_0 \sin(\omega t + 4\pi/3) \end{cases}$$

すると、円板は回転する。コイルの発生する磁束密度が導体円板を貫くときにうず電流が発生し、この電流が隣のコイルの磁束密度から力を受けるのだが、



この力が回転力になるように、各コイルに加える電圧の位相がうまくずれているためである。
電動機(モーター)に使われる。

(3) 粒子加速器ベータトロン



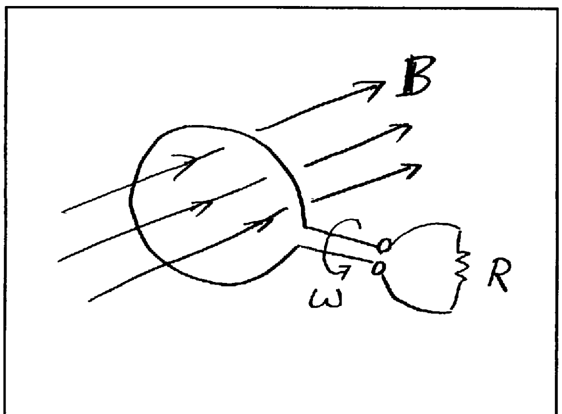

仮に、真空中に電荷を静止させて置いておき、磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を徐々に増加させながら加えると(右図)、最初静止させてあった電荷は動き出して円運動を始める。

時間的に一定の磁束密度がある場所に、初速度をもって飛び込む電荷はローレンツ力によって円運動を始めるが、これとは違う現象である。上の場合は初速度は0である。

これは $-\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ によって空間に誘導電界 $\boldsymbol{E}$ が発生し $m\dfrac{dv}{dt}=c\boldsymbol{E}$ によって動き始める現象である。基本方程式のところで、ファラデーの実験でコイルを置いても置かなくても空間に誘導電界が発生するという考えを説明したが、この現象は実際にそれを使っているのである。詳細な計算は演習で行うであろう。この方法により電荷に運動エネルギーを与え、高速（場合によっては光速に近い速度まで）にすることができる（上のように最初静止させておくわけではないが)。素粒子物理学で粒子を加速するのに使われるベータトロンという加速器の原理になっている。

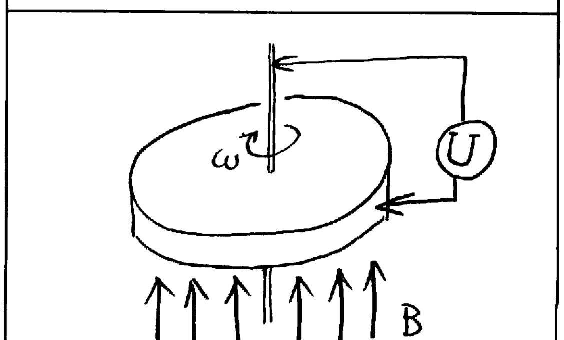
②磁束密度は時間的に一定で、コイルが移動する場合の実例

(1)発電機




右図のように、時間的に一定で一様な磁束密度中でコイルを回転させれば、電力が取り出せる（回転のエネルギーが電気エネルギーとして取り出せる)。原理はすぐ理解できると思う（各自考えよ。演習でも計算を行うであろう)。

(2)単極誘導発電機



(a)

右図のように、中心軸の周りに回転している導体円板に一定の磁束密度を加えると、中心軸と円板のふちの間に起電力が発生する。

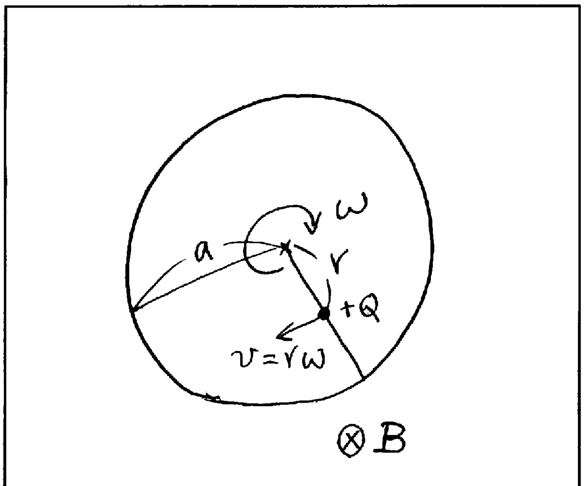
下図(b)のように、角速度を $\omega$ とすると、導体円板内で中心から $r$ の位置にある電荷は速度 $v=r\omega$ で回転している。この電荷は $vB$ という量を電界と感じ

ている。つまり $E = vB = r\omega B$ 。したがって中心と円板のふちの間の起電力は、円板の半径を $a$ として

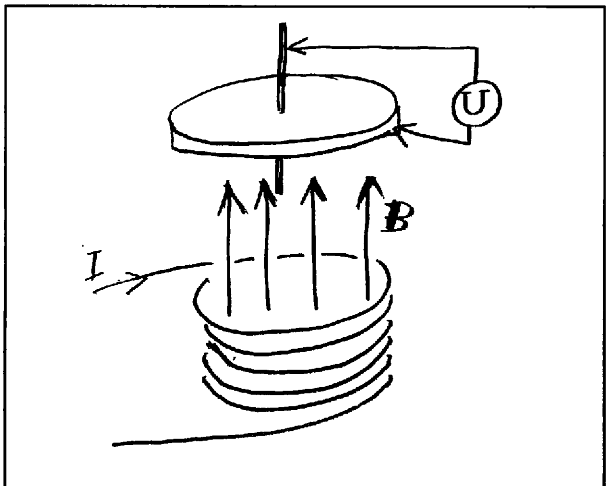
$$V = \int_0^a E\,dr = \int_0^a r\omega B\,dr = \frac{1}{2}a^2\omega B$$

**補足（脱線。とばしてよい）**

円板に加えている磁束密度はたとえば円板の下方にソレノイドなどを置いて発生させればよい(下図(c))。ここで、もし円板を回転させないで固定し、その代わりに磁束密度を発生させているソレノイドを回転させたら、円板につないだ電圧計には同じように起電力が観測されるだろうか。相対的に見れば、片方がもう片方に対して回転していることに変わりはない。しかしソレノイドの回転とともに磁力線も回転すると考えてよいのだろうか。



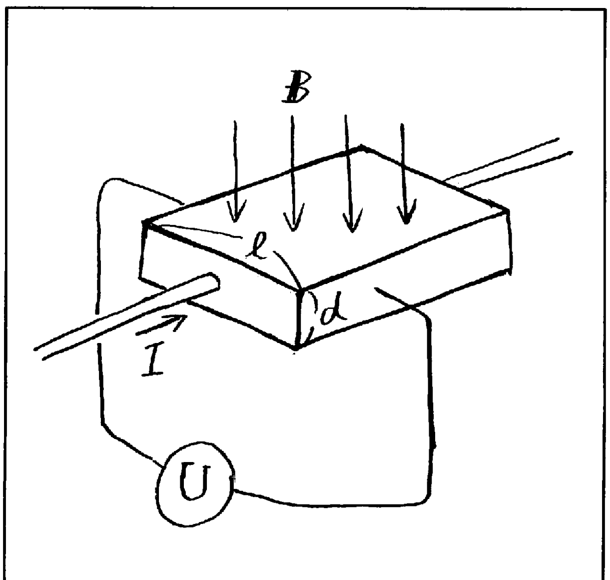

(b)




(c)

(4) ホール効果

右図(a)のように導体に電流を流しておき、電流と直角方向に一定一様の磁束密度を加えると、電流と磁束密度の両方に直角な方向に起電力が発生する。この起電力の大きさは磁束密度と電流の積に比例する。



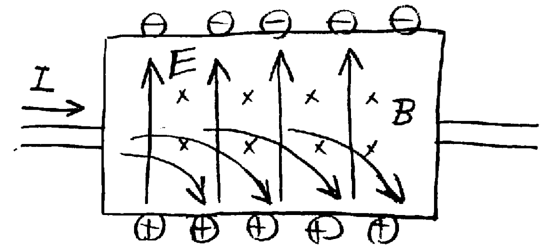

(a)

電流のもとになっている電子(電荷 $e$)の速度を $\boldsymbol{v}$ とすると、この電荷はローレンツ力 $e(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ をうけて、電流と磁束密度の両方に直角な方向に移動する。これを取り出して起電力として観測してもよいが、そうすると電流をまっすぐ流さないことになるので取り出さないことにすると、電子が移動した方向にある面には電子が蓄積するので（下図(b)）静電界が発生する。定常

状態では電子に対してローレンツ力とこの静電界による力がつりあっている。この静電界による電位差が測定されることになる。電流 $I$ 、単位体積あたりの電子密度 $n$ 、速度 $v$ の間の関係は、右図(a)を参照して $I = envld$ となる。 したがって $v = I/(enld)$ 。ローレンツ力と静電界による力がつりあっていることから $eE = evB = IB/(nld)$ 。したがって発生する起電力（＝静電界による電位差）は

$$V = E\ell = \frac{IB}{ned}$$

起電力は電流と磁束密度に比例し、比例係数(ホール係数)は電子密度を含んでいる。



(b)

ホール効果は簡単な磁束密度測定用のセンサに使われるほか、半導体などの材料の分野では比例係数が電子密度を含むことから、電子密度が未知の材料に対してホール測定を行ってこれを求めるという手段としても使われる。また、電流のもとになっている電荷が正電荷か負電荷かということが、起電力の方向をしらべるとわかる（各自考えよ）。これらは半導体物理の分野のことであるから、これ以上はやらない。