

第5回

内容 磁性体（つづき）

- ・ 磁性体が存在する空間の境界条件
- ・ 磁性体が存在する空間の B と H の分布（解析例）
- ・ 磁気回路

磁性体の存在する空間の境界条件

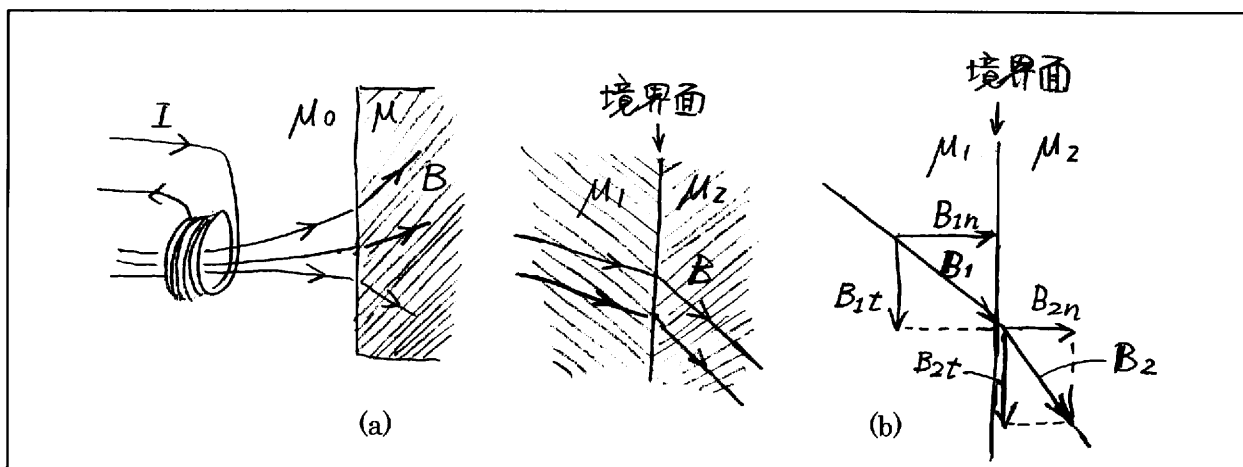
たとえば、真空中でコイルの電流によって作られた磁束密度が磁性体に入っていくとき(下図(a))、境界面(磁性体の表面)の内外で磁束密度はどのように変化するだろうか、という問題について説明する。

境界面の外側と内側の B （または H ）を結びつける関係式は、基本方程式

$$\begin{cases} \text{curl} \mathbf{H} = \mathbf{i} \\ \text{div} \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

から導出することができる。

下図(b)のように B_1 と B_2 を境界面に垂直な成分(法線成分) B_{1n} と B_{2n} 、および、平行な成分(接線成分) B_{1t} と B_{2t} に分けて、それぞれの間の関係式を導出する。

**垂直成分**

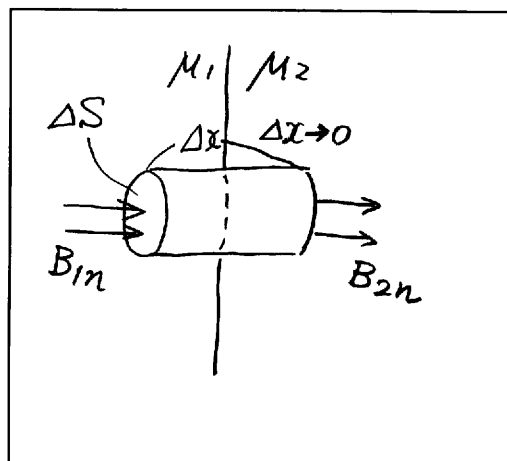
右図のように境界面に微小な円筒(底面積 ΔS 、高さ Δx)を考えると、基本方程式のひとつ $\text{div} \mathbf{B} = 0$ から、この微小円筒の全表面に対して $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ であり、 $\Delta x \rightarrow 0$

のとき、円筒に入出するのは B_{1n} と B_{2n} だけになるので、

$$-B_{1n}\Delta S + B_{2n}\Delta S = 0$$

したがって $B_{1n} = B_{2n}$

すなわち、 B の垂直成分は境界面で連続となる。



接線成分

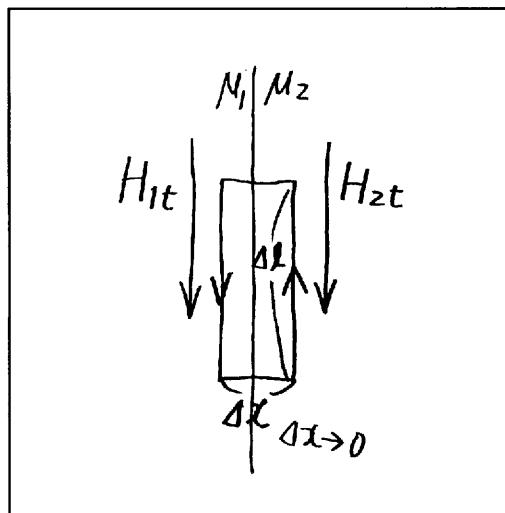
右図のように境界面に微小な長方形ループ（辺の長さ $\Delta\ell$ と Δx ）を考えると、基本方程式のひとつ $\text{curl} \mathbf{H} = \mathbf{i}$ から、この微小ループの周回積分に対しては、境界面に沿って真電流が流れていないときは $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = I = 0$ であり、 $\Delta x \rightarrow 0$

のとき、辺に沿うのは接線成分 H_{1t} と H_{2t} だけになるので、

$$H_{1t}\Delta\ell - H_{2t}\Delta\ell = 0 \quad \text{したがって} \quad H_{1t} = H_{2t}$$

すなわち、 $\mathbf{H}$ の接線成分が境界面で連続となる。

$$\mathbf{B} \text{ で書くと} \quad \frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2}$$



法線成分と接線成分をまとめて書くと、

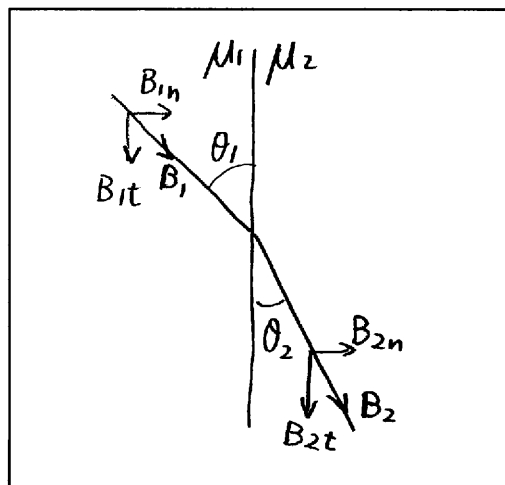
境界面の両側の磁束密度の間には次の関係が成り立つ。

$$\begin{cases} B_{1n} = B_{2n} \\ \frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2} \end{cases}$$

この結果を用いて、右図のように $\mathbf{B}$ の力線が境界面でどのように折れ曲がるか（つまり右図の θ_1 と θ_2 の関係）を知ることができる。上式を用いれば

$$\tan\theta_1 = \frac{B_{1n}}{B_{1t}} = \frac{B_{2n}}{\frac{\mu_1}{\mu_2} B_{2t}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \tan\theta_2$$

$$\text{すなわち} \quad \mu_1 \tan\theta_1 = \mu_2 \tan\theta_2$$

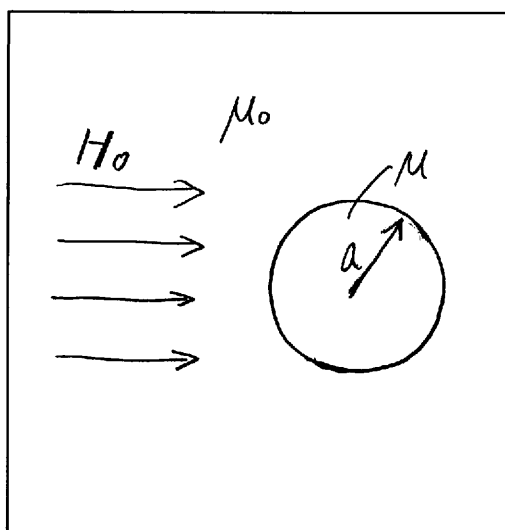


磁性体の存在する空間の $\mathbf{B}$ と $\mathbf{H}$ (解析例)

ここでは、上述の境界面での関係式(境界条件)を用いて解く問題の例をあげる。

(例) 真空中で一様な水平磁界 $\mathbf{H}_0$ のなかに半径 a 透磁率 μ の磁性体の球を置いたとき、この球の内外の磁界はどのようなになるか。

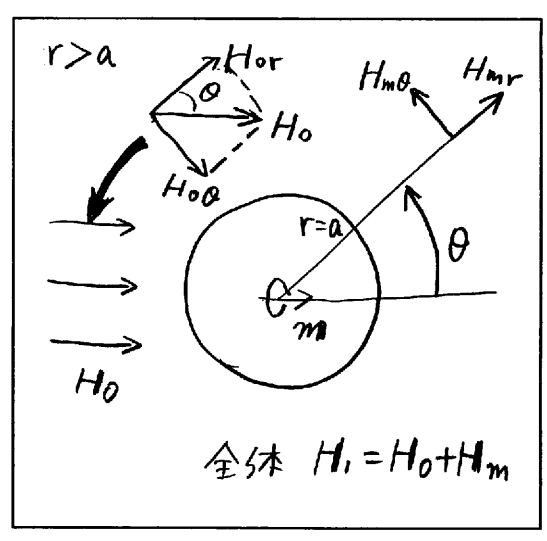
球の中心を原点とする球座標を用い、球の内部と外部 ($r \leq a$ と $a < r$) の磁界を別々に(独立に)解いて、その後で、球の表面 ($r = a$) で上述の境界条件を満足するようにつじつまを合わせる (境界条件を満足する解のみを取り出す)。



球の外側 ($r > a$) の解

球の外側の磁界は、もともとある H_0 に磁性体の磁化が作った磁界 H_m を加えたものが求める解となる。 H_m は右図のように、球の中心に H_0 の方向に置いた磁気双極子モーメント m によって作られると仮定する。

m の大きさは未知数のままにして計算を進め、境界面で内外の解が境界条件を満たすことができるように、最後に値を決める。



注: なぜこのような m を置けばよいことがわかるのか、という点については省略する。解が最初から予想できているのでこう置いたと言われてしまえばそれまでであるが、最初からこう置かないで解く方法もある。複雑なのでごく概略だけ述べると、球の中心に双極子、四重極子、八重極子、...すべてをおいたときに作られる磁界の和は、可能な解すべてを含む一般解であることが数学的に証明できるので(球面調和関数という特殊関数が出てくるので省略)、この一般解の中から球の表面で境界条件を満たすものだけを選び出すと双極子による解だけが残る、ということになるのである。

m のつくる磁界 H_m は、前々回説明したように

$$\begin{cases} r \text{ 方向 } H_{mr} = \frac{m \cos \theta}{2\pi r^3} \\ \theta \text{ 方向 } H_{m\theta} = \frac{m \sin \theta}{4\pi r^3} \end{cases}$$

球の外側の磁界は $H_1 = H_0 + H_m$ であり、球座標成分で表わすと

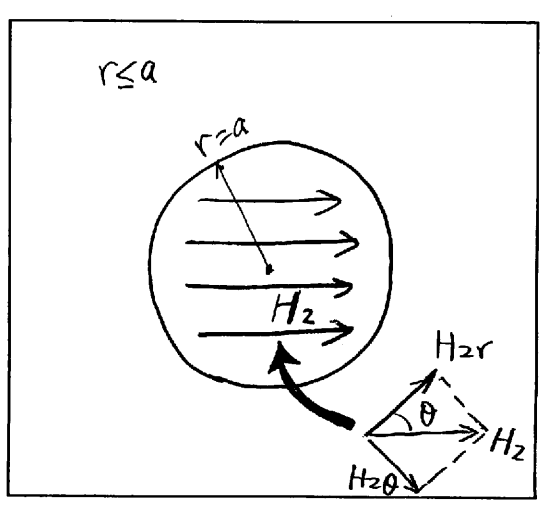
$$\begin{cases} H_{1r} = H_{0r} + H_{mr} = H_0 \cos \theta + \frac{m \cos \theta}{2\pi r^3} \\ H_{1\theta} = H_{0\theta} + H_{m\theta} = -H_0 \sin \theta + \frac{m \sin \theta}{4\pi r^3} \end{cases}$$

これが球の外側 ($r > a$) での解である。ただし、上述のように m は未知数で、最後の段階で求められる。

球の内側 ($r \leq a$) の解

球の内側の解に対しては、右図のような一様な磁界 H_2 を仮定する。(なぜこのように仮定できるのか、については省略。上述の注と同じ。)

ただし、一様ということだけ仮定し、 H_2 の大きさは未知数のままとして計算を進める。境界面で内外の解が境界条件を満たすことができるように、最後に値を決める。



H_2 を球座標で書くと

$$\begin{cases} H_{2r} = H_2 \cos\theta \\ H_{2\theta} = -H_2 \sin\theta \end{cases}$$

これが球の内側($r \leq a$)での解である。ただし、上述のように H_2 は未知数で、最後の段階で求められる。

以上で球内外の解の形が求められたので、次に、球の表面でこれらが境界条件を満たすように m と H_2 を決める。境界条件 [球表面($r=a$)で $\mathbf{H}$ の接線成分(θ 成分)と $\mathbf{B}$ の法線成分(r 成分)がそれぞれ連続] を式で書くと、 $r=a$ において $H_{1\theta} = H_{2\theta}$ および $\mu_0 H_{1r} = \mu H_{2r}$ となる。これらの式に上で得られた球内外の解を代入すると

$$\begin{cases} H_0 - \frac{m}{4\pi a^3} = H_2 \\ H_0 + \frac{m}{2\pi a^3} = \frac{\mu}{\mu_0} H_2 \end{cases}$$

これは未知数 m と H_2 の連立方程式になっている。

(θ に依存しない式が得られたということから、最初に仮定した球内外の解の形は正しかったということになる。) この連立方程式を解くと

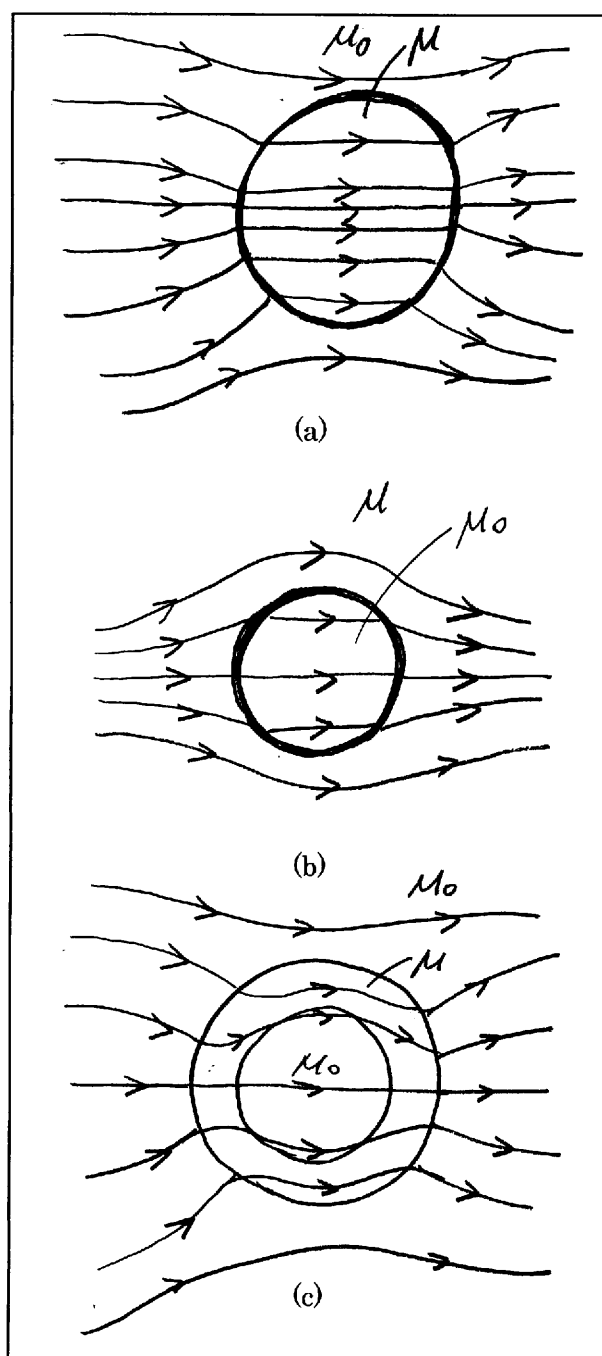
$$\begin{cases} H_2 = \frac{3\mu_0}{2\mu_0 + \mu} H_0 \\ \frac{m}{4\pi a^3} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} H_0 \end{cases}$$

これらを上で得られた解に代入すれば、未知数を含まない最終的な解になる。

この解を磁力線で表わして図示すると右図(a)のようになる。図のように、磁力線は透磁率の大きい場所で密度が高くなるように分布する傾向がある。

右図(b)のように一様な磁界を加えられた透磁率 μ の磁性体に半径 a の球形の穴を開けた場合は、上の例で μ と μ_0 を入れ替えば解が得られる。磁力線はやはり透磁率の大きい場所で密度が高くなるので、穴を避けるように分布する。すなわち穴の中では磁性体内部よりも磁界が弱くなっている。

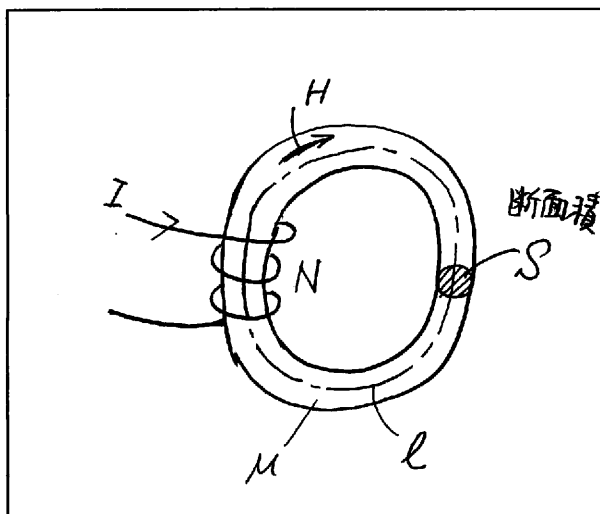
右図(c)のような球殻の場合は(a)と(b)の組み合わせになるが、やはり内部の磁界は外部より弱くなる。これは磁気シールド(たとえば地磁気の影響を受けては困るような精密測定装置を包む)として使われる。



磁気回路

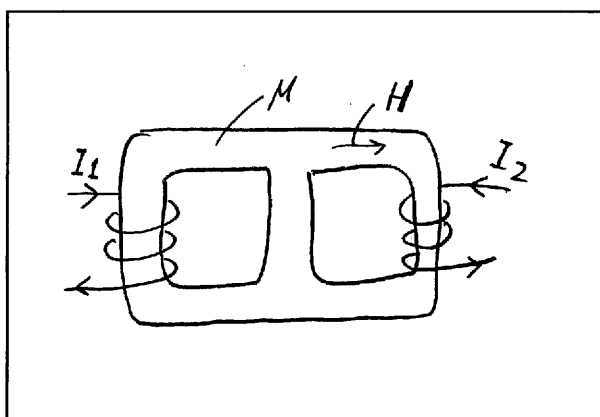
磁性体が存在する空間の B と H を求めたいとき、磁性体や電流分布の形が比較的単純な場合には、これまで説明してきた基本方程式を使えば、簡単に計算できる。

たとえば右図のようなドーナツ型の磁性体（透磁率 μ 、周長 ℓ 、断面積 S ）にコイルが N 回巻かれているような系について、 B と H はアンペアの法則を使って簡単に求められる。ただし、周長は断面の寸法に比べて十分長く、断面内で B と H は一様と仮定できるものとする。



この場合、アンペアの法則 $NI = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{\ell}$ からす

ぐに $H = NI/\ell$ 、 $B = \mu H = \mu NI/\ell$ が得られる。このように単純な形状ならば計算は比較的簡単である。しかし、磁性体や電流分布の形が複雑な場合は、このように簡単には行かない。たとえば、右図のような形状で B と H を求めるのは単純ではない。



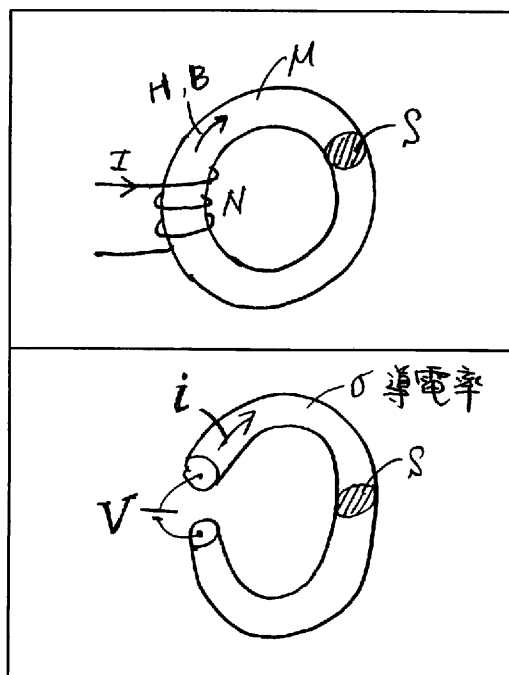
このような場合には、以下で説明する磁気回路の考えを用いる。最初から話を複雑にしないために、もう一度、上図のドーナツ型の形状を例にとって説明する。

磁性体にコイルが巻かれているとき、磁性体の透磁率が真空中に比べて十分大きければ、コイルによる磁界はほとんどすべて磁性体のみを通る（上記の解析例で説明した）。磁性体の中で成り立つ基本方程式を列挙すると

$$\begin{cases} NI = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{\ell} \\ \Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \\ \text{div} \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

一方、これとはまったく別の問題であるが、右図のようにドーナツ型の導体に電源がつながれているとき、電流はもちろん導体にしか流れず、導体内で次の方程式が成り立つ。

$$\begin{cases} V = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{\ell} \\ I = \iint_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} \\ \mathbf{i} = \sigma \mathbf{E} \\ \text{div} \mathbf{i} = 0 \end{cases}$$



以上の2つ、すなわち、磁性体中で成り立っている方程式と導体中で成り立っている方程式は、形式上次の対応関係にある（注意：もちろん全く形式上のことである。扱っている物理量は全く異なる。）

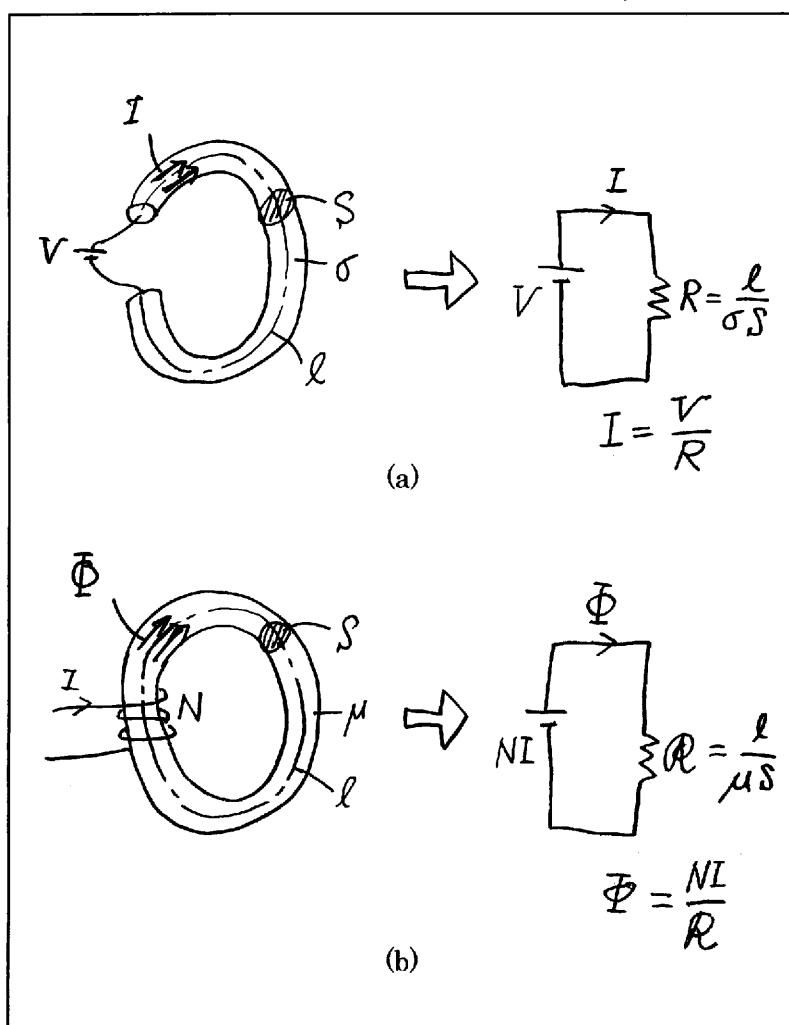
対応	
磁性体（磁気回路）	導体（電気回路）
NI	$\Leftrightarrow V$
Φ	$\Leftrightarrow I$
B	$\Leftrightarrow i$
μ	$\Leftrightarrow \sigma$

電気回路では、通常、上のような基本方程式をいちいち解かないで右図(a)のように回路図に置き換えて、回路中でオームの法則、あるいはキルヒホッフの法則を使って解く。右図の場合は $I = V/R = V \times \sigma S / \ell$ とすぐに計算できる。

そこで、磁性体の場合も、基本方程式が形式上全く同じなので、右図(b)のように、上述の対応関係を使って回路図に置き換えて、同じように解くことができる。この回路が磁気回路である。電気回路の抵抗 $R = \ell / (\sigma S)$ に対応するのは、形式的に $\mathcal{R} = \ell / (\mu S)$ という量で、これは磁気抵抗とよぶことができる。電流に対応する磁束は、直ちに

$$\Phi = NI / \mathcal{R} = NI \times \mu S / \ell$$

と求められる。（注意：もちろん磁気回路は全く形式的なものであるから、磁束に対応する何かが本当に流れているわけではない。念のため。）



このようにして、磁性体を磁気回路で置き換えて、電気回路と全く同じように解くことができる。上の例は簡単な形状だったので、オームの法則を使う程度ですぐ解けたが、複雑な形状ならば、キルヒホッフの法則や回路理論の知識も使うこともあるだろう。回路によっては計算は複雑かもしれないが、もとの基本方程式だけを使っているのは手におえない問題が、このように回路に置き換えることによって解けることになる。

(例)

右図(a)のような形状の磁性体中の B を、磁気回路を使って計算する。磁気回路は右図(b)のようになるので、直ちに、

$$\Phi = \frac{NI}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2} = \frac{NI}{\frac{\ell_1}{\mu S} + \frac{\ell_2}{\mu_0 S}}$$

したがって

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{NI}{\frac{\ell_1}{\mu} + \frac{\ell_2}{\mu_0}}$$

この問題を基本方程式でじかに解こうとすると、境界条件などを考えたりして複雑なことになるが、磁気回路なら、機械的に解くことができるのである。

なお、上図(a)の真空の部分(ℓ_2 の部分)について、磁気抵抗は断面積を磁性体と同じとして計算した。この計算には、図(c)に示すように、磁力線が磁性体からほとんど垂直に出て垂直に入る(磁性体の断面と同じ形状の外にははみ出さない)という仮定が入っている。これは ℓ_2 が磁性体断面の寸法に比べて十分小さいとき成り立つ。

もっと複雑な形状でも、原理的には同じように解けるはずである。たとえば下図のような。しかし、ここでは以上の例にとどめる。他の例は演習でも行うであろう。

