第４回

内容　・磁性体

磁化、磁界、透磁率

・基本方程式（まとめ）

今回は文章が多い。まとめは簡潔。

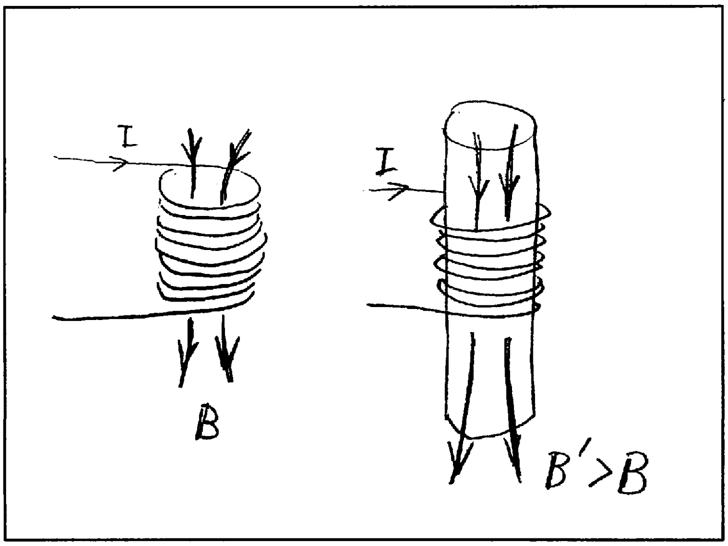
磁性体

物質に加えた外部からのBの影響

前回まで真空中の磁束密度を扱ってきた。真空中の磁束密度は次の基本方程式で計算できる、

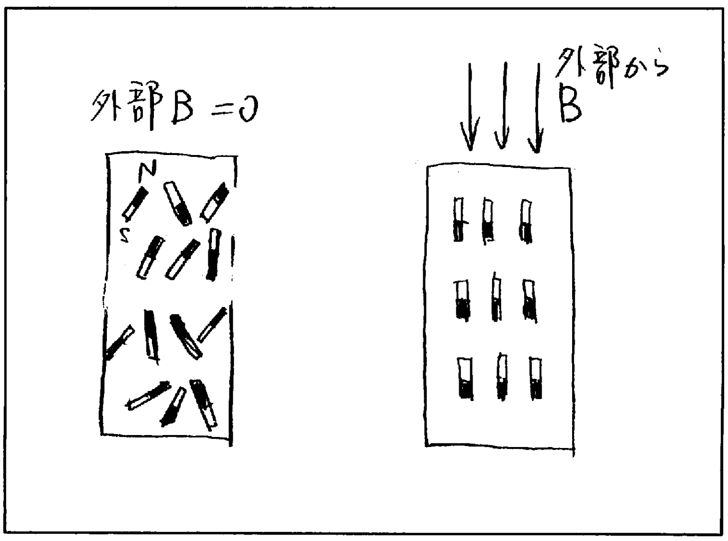
$$\begin{cases} \mathrm{curl}\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{i} \\ \mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \end{cases}$$

この基本方程式には物質がある場合は含まれていない。一方、われわれは経験的に、コイル中にたとえば鉄などを入れると磁束密度$\boldsymbol{B}$が真空中よりも大きくなることを知っている。（右図。しかし、じつは物質によっては、真空中よりも$\boldsymbol{B}$が小さくなる場合もあり得る。あとで説明する。）



今回は、このように物質（磁性体）によって$\boldsymbol{B}$が変化することを、どのように電磁気の方程式に取り入れるかについて説明し、物質を含んでいる場合にも使える基本方程式を導く。

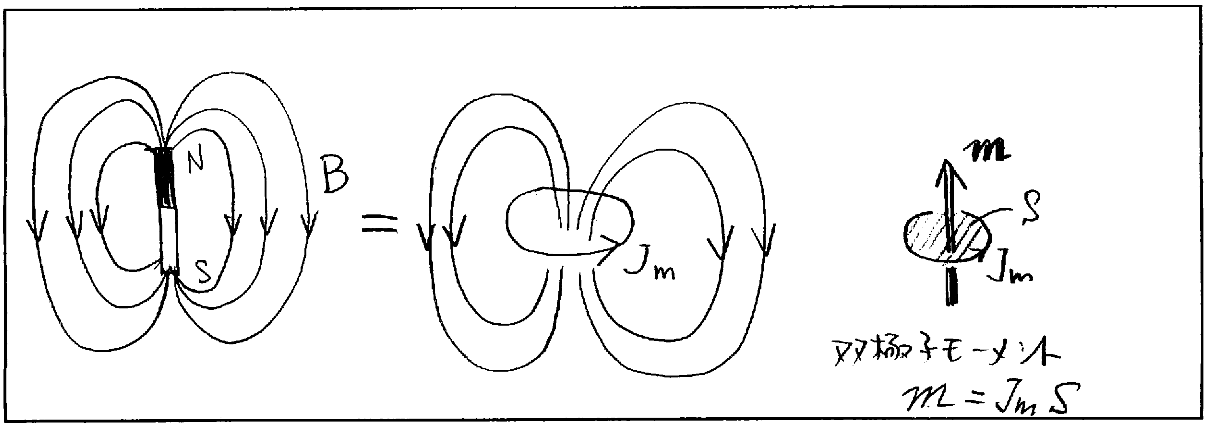
外部から$\boldsymbol{B}$を物質に加えたときに、$\boldsymbol{B}$が大きくなる現象は次のように考えることができる。



まず、物質は微小な磁石の集まったものであると考える。外部から$\boldsymbol{B}$が加えられていないときは、この微小磁石はいろいろな方向を勝手に向いており、したがって、これら微小磁石の発生する$\boldsymbol{B}$のベクトルの合計は０になり、全体では磁石には見えず、外部には何も影響を与えない。

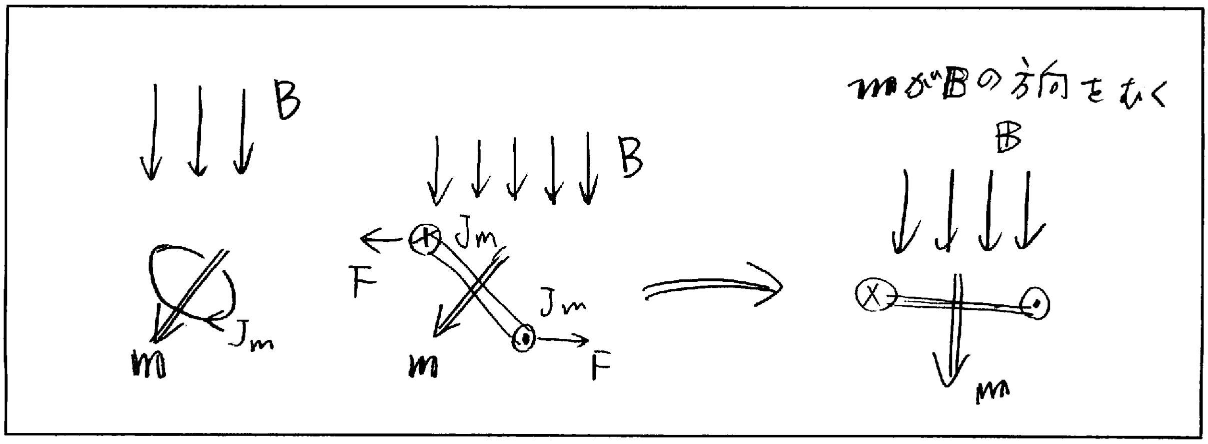
この物質に外部から$\boldsymbol{B}$を加えると、ばらばらに勝手な方向を向いていた微小磁石は外部の$\boldsymbol{B}$から力を受けて、大部分が同じ方向にそろい(上図)、微小磁石の発生する$\boldsymbol{B}$のベクトルは合計されても 0 でない値になる。この$\boldsymbol{B}$が外部からの$\boldsymbol{B}$と同じ方向であれば、これらの和として$\boldsymbol{B}$は大きくなる。これがわれわれが経験的に知っている現象である。

さて、前回説明したように、微小磁石は電流ループの作る磁気双極子モーメントにそのまま置き換えることができる（下図）。したがって、物質は微小な電流ループ(磁気双極子モーメント)の集合でできていると考えてよい。



実際、物質を構成する原子中の電子は原子核の周りを回っているので（厳密にいうなら、原子中の電子は軌道角運動量を持っているので）この考えは妥当である。さらに、電子は（円運動していなくても）それ自体が角運動量を持っていて磁気双極子モーメントを持つと考えることができ、原子はこれらの和の磁気双極子モーメントを含んでいる。(この電子自体の持つ角運動量をスピンとよぶ。電子の自転と考えるとイメージしやすいが、厳密にいうと正しくない。)
原子の持つ磁気双極子モーメントはどれほどの大きさか、という問題は電磁気学の範囲外なので、これ以上は触れない。(固体物性論の範囲である。そこでは、上で述べた電子の運動が量子論を使ってもっと正確に扱われる。)
ここでは、ともかく物質が磁気双極子モーメントの集合体であるということだけ認めて進める。

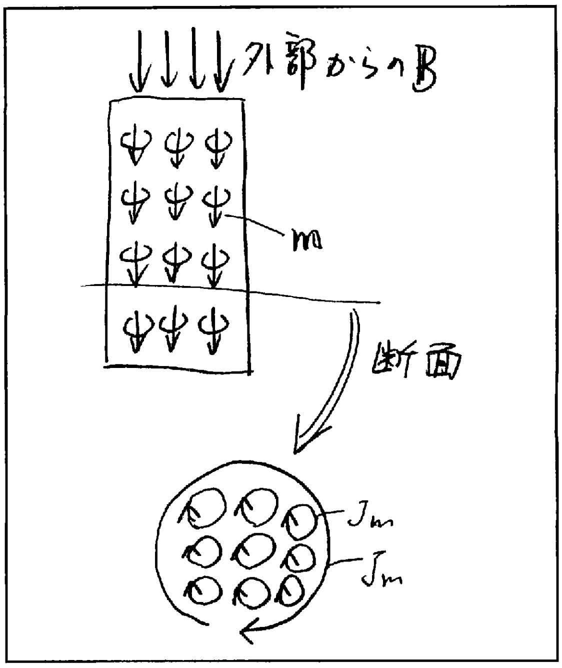
上に述べた「微小磁石が外部からの$\boldsymbol{B}$により方向をそろえる」という性質は、微小電流ループに置き換えて考えれば、この微小電流が外部の$\boldsymbol{B}$から回転力(トルク)を受けて方向をそろえると考えることができる(下図)。双極子モーメント$\boldsymbol{m}$が方向をそろえるということもできる。



磁化電流

ここでは、物質（微小電流ループの集合体）が存在するとき、これまで扱ってきたアンペアの法則がどのように変更されるか、について説明する。

右図のように、外部からの$\boldsymbol{B}$によって微小電流ループの向きがすべてそろっている場合を考える。一つ一つの微小電流ループの電流値をJ_mとすると、断面図を見るとわかるように、内部では隣り合うJ_mが打ち消しあって、結局、物質の一番外側に大きな電流ループがあるのと同じことになる。（注意：もちろん、本当に電流がループになって流れているわけではない。微小電流ループはつながっていないのだから。）



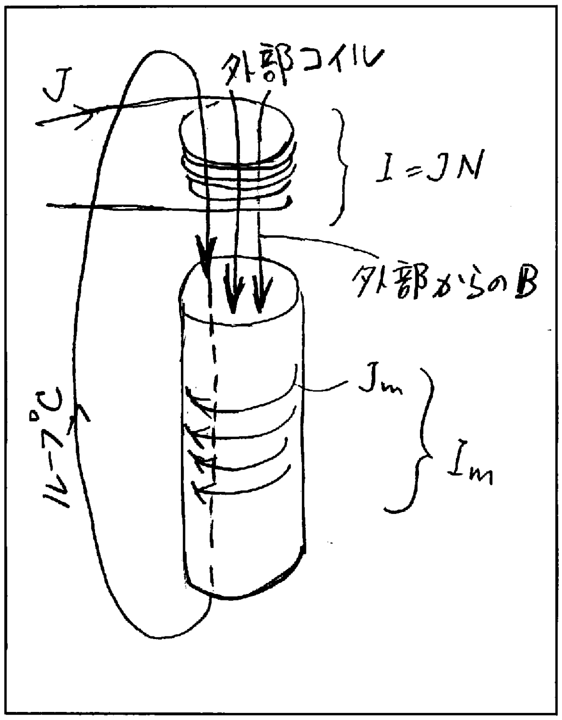
さて右図のように、外部の$\boldsymbol{B}$を作っているコイルの電流Jと、物質中のJ_mをすべて含む経路でアンペアの法則を適用すると、

$$\oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0(I+I_m)$$

ただし、IとI_mはそれぞれ、積分路Cを貫くJとJ_mの合計の電流である。

上式が、物質を含む場合のアンペアの法則である。真空中に比べて、I_mが追加されるために$\boldsymbol{B}$が変化するのである（I_mがIと同じ方向ならば$\boldsymbol{B}$は大きくなっている）。

このI_mを<u>磁化電流</u>とよぶ（くりかえすが、つながっていないので本当の電流ではない）。これに対して、これまでの導体中の電流は<u>真電流</u>（あるいは自由電流）とよんで区別する。



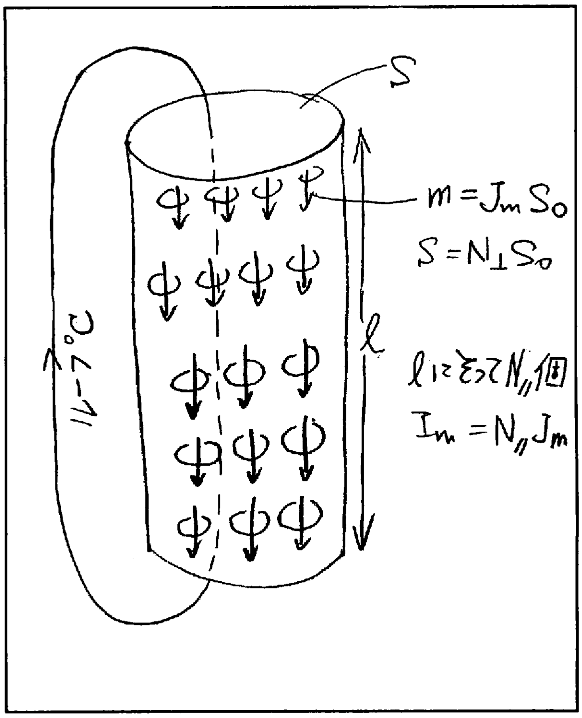
以下では、上式を磁化電流の代わりに磁気双極子モーメント$\boldsymbol{m}$（の合計）を使った式に書き換えていく。そのほうが使いやすい式になるからである。

注意：上の説明で仮定した「微小電流ループの向きがすべてそろっている状態」というのは、もちろん理想的な状態である。現実には、双極子モーメントは熱運動のために常にばらばらの方向になろうとしているので（エントロピー増大、あるいは熱力学第二法則）、絶対零度以外では、外部からの$\boldsymbol{B}$で大部分はそろうものの、全部が完全にそろうことはない。この場合、上述の議論のように内部でJ_mがすべて等しいとはいえない（$\boldsymbol{B}$と同じ方向を向いていない双極子モーメントベクトル$\boldsymbol{m}$に対しては、$\boldsymbol{m}$のうちの$\boldsymbol{B}$と同じ方向の成分だけ考えるので、これに対するJ_mは小さくなる。）しかし、物質内部のJ_mのばらつきがあっても、上述の議論はJ_mのところをその平均値と考えれば、同じように進めることができて、同じ結果になる。

磁化

上述の方程式を書き換えていくために、まず、磁化というものを次のように定義する。

磁化 $\boldsymbol{M}\equiv$ 単位体積あたりの双極子モーメント$\boldsymbol{m}$の合計　（ベクトルとしての合計）



上で述べたように、外部からの$\boldsymbol{B}$がなければ$\boldsymbol{m}$はばらばらの方向を向いているので$\boldsymbol{M}=0$である。外部からの$\boldsymbol{B}$により$\boldsymbol{m}$のほとんどがそろえば、$\boldsymbol{M}$は大きな値になる。

さて、右図のように、物質の断面積をS、長さをℓとする。$\boldsymbol{m}$がすべて同じ方向にそろっている場合を考えることにし、面積S内にある$\boldsymbol{m}$の数を$N_\perp$とする。（微小電流ループの面積をS_0とすれば、$m=J_m S_0$および$N_\perp=S/S_0$である。）
また、ℓに沿ってならんでいる$\boldsymbol{m}$の数を$N_\parallel$とする。
このとき、磁化の大きさは上の定義により

$$M=m\frac{N_\perp N_\parallel}{S\ell}=(J_m S_0)\frac{(S/S_0)N_\parallel}{S\ell}=\frac{J_m N_\parallel}{\ell}=\frac{I_m}{\ell}$$

すなわち　$M\ell=I_m$　が成り立つ。

以上は各原子の$\boldsymbol{m}$の方向がすべてそろっている場合である。ふつうは完全にすべてそろうことはない(前頁の注)ので、$\boldsymbol{m}$は各原子の値を平均した量とみなす。また、場所により$\boldsymbol{m}$が異なる場合は、$\boldsymbol{m}$が一様とみなせる小さな領域（ただし原子よりは大きい）に分割すれば、各領域に対して上式が成り立ち、全領域では上式の代わりに

$$\oint_C \boldsymbol{M}\cdot d\boldsymbol{\ell}=I_m \qquad \text{微分表現では}\quad \mathrm{curl}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{i_m}$$

物質を含むアンペアの法則

磁化$\boldsymbol{M}$を使うと、物質を含む場合のアンペアの法則は以下のように書き換えられる。

$$\oint_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{\ell}=\mu_0(I+I_m)=\mu_0 I+\mu_0\oint_C \boldsymbol{M}\cdot d\boldsymbol{\ell} \quad \text{から}$$

$$\oint_C\left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}\right)\cdot d\boldsymbol{\ell}=I$$

この式は、右辺の真電流が原因となって左辺の量が生じることを表している。実際においても、人為的に直接変えられるのは真電流だけであり、それによって物質の磁化と全体の磁束密度が決まるのであるから、この式は現実にあっていて使いやすいと考えられる。そこで左辺の量はひとつの量として表しておくと便利なので、$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}/\mu_0-\boldsymbol{M}$と定義すると

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{\ell}=I \qquad \text{微分表現すると}\quad \mathrm{curl}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{i}$$

これが、物質を含むアンペアの法則である。$\boldsymbol{H}$を磁界とよぶ。上式から$\boldsymbol{B}$と$\boldsymbol{H}$の関係は

$$B = \mu_0 H + \mu_0 M$$

物質が存在しないときは$B = \mu_0 H$ である。

磁界 H の単位　H の単位は[A/m]（電流/長さ）。上述のアンペアの法則からすぐわかる。
古い表現では[A ターン/m]。[A/m]と同じもの。ターンに特に意味はない。コイルを巻いて H をつくることを想定して、巻数まで含めている。

透磁率

物質を含むアンペアの法則が上のように得られたが、これを用いて磁束密度 B を求めるときは、まずアンペアの法則によって磁界 H を求め、次に磁化 M を求めて、この２つから B を求めることになる。しかし M を求めるところに面倒なことが含まれている。M は B の関数なので、実際には、与えられた H に対して $B/\mu_0 - M(B) = H$ という方程式を解いて B を求めることになる。

これを具体的に行うには、M が B のどんな形の関数であるか知る必要がある。しかし、このためには磁気双極子モーメントの大きさを求める必要があり、すでに述べたようにこれは電磁気学の範囲ではない。ここでは M が簡単に表せる場合について説明する。複雑な場合については、あとでグラフを使って概略だけ示す。

もっとも簡単なのは M が B に比例する場合である。すなわち外部から加えた B の大きさに比例して、B の方向を向く m の数（あるいは m の B 方向成分）が増加していく場合である。簡単であるが、しかし、多くの物質では（B が極端に大きくない限り）よく成り立っている。M が B に比例する場合は、H の定義から明らかなように、M は H にも比例する。そこで最初から M を次のようにおく。

$$M = \chi_m H$$

χ_m は比例定数であり、<u>磁化率</u>とよばれる。これを用いると H と B の関係は

$$B = \mu_0 H + \mu_0 M = \mu_0(1+\chi_m)H \equiv \mu_0\mu_r H \equiv \mu H$$

$\mu_r = 1 + \chi_m$ は<u>比透磁率</u>、$\mu = \mu_0\mu_r$ は<u>透磁率</u>とよばれる。

常磁性体と反磁性体

χ_m は物質によって異なる値をとる。

$$\begin{cases} \chi_m > 0 \quad (\mu_r > 1) \rightarrow \text{常磁性体} \\ \chi_m < 0 \quad (\mu_r < 1) \rightarrow \text{反磁性体} \end{cases}$$

常磁性体では磁化 M が H と同じ方向を向く。すなわち物質中の磁気双極子モーメントが H や外部からの B と同じ方向を向く。したがって合計の B は真空中の場合よりも大きくなる。

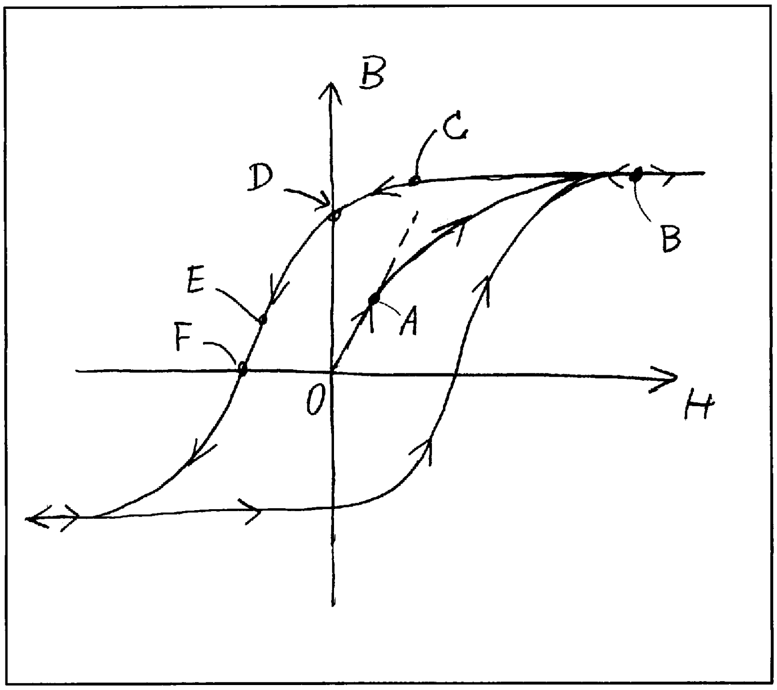
反磁性体の場合は M が H と反対方向を向く。すなわち物質中の磁気双極子モーメントが外部からの B と反対方向を向く。したがって合計の B は弱まる。

反磁性は、電磁石のような経験的な現象と逆なので奇異に思われるかもしれない。参考までに、反磁性の原因の代表的なものは、物質中の微小電流ループのもとになっている電子の運動（原子核の周りの円運動）が、外部から B を近づけると、電磁誘導によって外部の B を打ち消すように変化することである（レンツの法則）。（電磁誘導については後の回で説明する。ここでは参考のみ。）したがって、反磁性はすべての物質に存在する自然な現象なのである。しかし、これによる χ_m はふつう非常に小さい。常磁性は、原子の持つ双極子モーメントの向きが

外部の$\boldsymbol{B}$と同じ方向にそろうことによって生じるが、双極子モーメントが大きくて非常に常磁性が大きい材料があるので（こういう材料では反磁性はかくれて見えない）、経験的にはよく目立つため一般的と感じられ、逆に反磁性はあまりない現象と感じてしまうのである。

強磁性体

以上では磁化$\boldsymbol{M}$が$\boldsymbol{H}$に比例する物質について説明した。この場合は$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{H}$はすべて比例関係にある。多くの物質はこれがあてはまるが、強磁性体のようにこれが成り立たない物質も存在する。



強磁性体では$\boldsymbol{M}$が外部からの$\boldsymbol{B}$に比例して増加せず、その結果、$\boldsymbol{B}$と$\boldsymbol{H}$は比例関係でなく複雑な関係になる。代表的な$\boldsymbol{B}$と$\boldsymbol{H}$の関係をグラフで示すと右図のようになる。

原点から$\boldsymbol{H}$を正方向に増加させていくと（詳しくいうと、外部のコイルの電流を増加させることによりアンペアの法則にしたがって$\boldsymbol{H}$を増加させていくと）、$\boldsymbol{H}$が小さいうちは$\boldsymbol{M}$が$\boldsymbol{H}$に比例して増加するので、$\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H} + \mu_0\boldsymbol{M}$と$\boldsymbol{H}$は比例している（右図A点）。

$\boldsymbol{H}$が大きくなると、物質中の$\boldsymbol{m}$はほとんどすべて$\boldsymbol{H}$の方向を向いてしまい、この合計$\boldsymbol{M}$はほとんど最大となって飽和する。したがって$\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H} + \mu_0\boldsymbol{M}$もほとんど飽和する（右図 B 点。$\mu_0\boldsymbol{M}$の寄与は$\mu_0\boldsymbol{H}$に比べて非常に大きいのでほとんど飽和する形になる）。

次に、飽和状態から$\boldsymbol{H}$を減少させていくと、グラフは同じ曲線を戻らない。（右図C点。これをヒステリシス現象という）。これは、$\boldsymbol{H}$を減少させても、互いに他の$\boldsymbol{m}$からの$\boldsymbol{B}$によって助け合って同じ方向にそろい、$\boldsymbol{M}$が元に戻らないからである。図のように$\boldsymbol{H} = 0$でも（つまり外部のコイルの電流を0にしても）$\boldsymbol{B}$は0にならない（右図D点）。これは磁石に他ならない。

さらに$\boldsymbol{H}$を逆方向に増加させていくと、$\boldsymbol{B}$は減少し（右図E点。このとき$\boldsymbol{B}$と$\boldsymbol{H}$は互いに逆方向）、右図F点で0となったあと負領域に入る。このまま$\boldsymbol{H}$を正負に変化させると、原点に対して対称な曲線になる。原点は通らないが、原点に戻したければ、正負に振る$\boldsymbol{H}$の振幅を徐々に小さくして原点に収束させる（消磁）。

永久磁石用材料は右図のD点とF点の値が大きいほどよい。磁気メモリ用なら、D点が大きくF 点が小さいほど、読みやすく書き込みやすいのでよい。目的に合う材料を探したり合成したりするのは材料開発の分野になる。

上図のようなB-H曲線はどのような測定により得られるのか、については省略する。

$\boxed{\text{基本方程式}}$（まとめ）

・物質（磁性体）を含む場合の基本方程式

$$\begin{cases} \oint_{C} \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{\ell} = I & \text{（アンペアの法則）} \\ \oiint_{S} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = 0 & \text{（単極磁荷はないという法則）} \end{cases} \qquad \text{微分表現では} \quad \begin{cases} \mathrm{curl}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} \\ \mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \end{cases}$$

・静電界と対応させた $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{H}$ の性質

		対応	
界	$\boldsymbol{B}$	$\Leftrightarrow$	$\boldsymbol{E}$
	$\boldsymbol{H} = \dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} = \dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu}$		$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon\boldsymbol{E}$
界の源	$Id\boldsymbol{\ell}$（電流素片）		Q（電荷）
基本方程式	$\mathrm{curl}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}$（うず界）		$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho$（発散界）
	$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$		$\mathrm{curl}\boldsymbol{E} = 0$
ポテンシャル	$\boldsymbol{B} = \mathrm{curl}\boldsymbol{A}$		$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,V$
力	$\boldsymbol{F} = Id\boldsymbol{\ell}\times\boldsymbol{B}$		$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E}$

補足

もし電流がなくて磁性体だけが存在したら、基本方程式のひとつ $\mathrm{curl}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}$ は $\mathrm{curl}\boldsymbol{H} = 0$ となるが、これは静電界の $\mathrm{curl}\boldsymbol{E} = 0$ と同じ形であるから、$\boldsymbol{H}$ に対して $\boldsymbol{H} = -\mathrm{grad}\,V_m$ となるようなスカラポテンシャル V_m を定義することができる。

これは磁界 $\boldsymbol{H}$ が磁荷 Q_m から静電界と同じようにクーロンの法則によって作られていると考えるのと同じである。（ただし単極磁荷は存在しないので、いつも磁荷の対 $\pm Q_m$ を考えることになるが。）電流が存在しない空間だけを考えるならば、このような理論体系を用いてもまったく問題はないのである。