

第3回

- 内容
- ・ベクトルポテンシャル（復習）
 - ・ベクトルポテンシャルの計算例
直線電流（有限長、無限長）
微小ループ電流
 - ・磁気双極子
 - ・ベクトルポテンシャルと仕事量の関係について（補足的）
 - ・磁束

今回は計算の多い内容である。

ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ （復習）

- ・定義 磁束密度 $\mathbf{B}$ に対して $\mathbf{B} = \text{curl} \mathbf{A}$ （基本方程式のひとつ $\text{div} \mathbf{B} = 0$ から）
- ・ゲージ 2つのベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad} \varphi$ (φ は任意のスカラー関数) は同じ $\mathbf{B}$ を与える。
- ・基本方程式 $-\nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}$ （クーロングージ $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ のとき）
解（特解） $\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_c \frac{d\ell}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$
- ・計算手順 基本方程式を用いて $\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ の順に段階を踏んでとく。
 $\mathbf{I}$ と $\mathbf{A}$ が同じ方向であることに注目すると考えやすくなる場合が多い。

ベクトルポテンシャルの計算例

例1. 直線電流の作るベクトルポテンシャル（有限長）

右図1の直線電流部分が作る $\mathbf{A}$ を求める。回路にはもちろん他の導線部分も含まれているが、それらの作る $\mathbf{A}$ は無視する。

図2のように電流を中心軸とする円筒座標で考える。 $\mathbf{A}$ は電流と同じ方向になるはずなので、 z 方向の成分 A_z 以外は0になる。

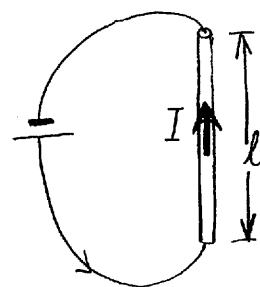


図1

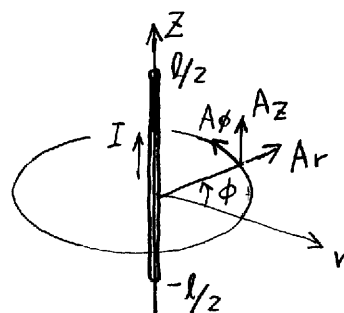


図2

A_z に対して、図 3 を参照しながら、基本方程式の解 (上述) の積分の形を当てはめると、

$$\begin{aligned} A_z(r, z) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\ln \left| (z - z') + \sqrt{r^2 + (z - z')^2} \right| \right]_{z'=-\ell/2}^{\ell/2} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left[\frac{(2z - \ell) + \sqrt{4r^2 + (2z - \ell)^2}}{(2z + \ell) + \sqrt{4r^2 + (2z + \ell)^2}} \right] \end{aligned}$$

積分の計算は数学公式集などを使って手早く済ませてしまうのがよい (数学の講義ではないのだから、なるべく省力化を図る)。複雑な結果となったが、とにかく求められた。

次に $\mathbf{B} = \text{curl} \mathbf{A}$ によって $\mathbf{B}$ を求める。

円筒座標の curl は (教科書の付録ページ参照)

$$\begin{cases} B_r = (\text{curl} \mathbf{A})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \\ B_\phi = (\text{curl} \mathbf{A})_\phi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ B_z = (\text{curl} \mathbf{A})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \end{cases}$$

上式の $A_z(r, z)$ と $A_\phi = A_r = 0$ を代入すると

$$\begin{cases} B_r = 0 \\ B_\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{2z + \ell}{\sqrt{4r^2 + (2z + \ell)^2}} + \frac{2z - \ell}{\sqrt{4r^2 + (2z - \ell)^2}} \right] \\ B_z = 0 \end{cases}$$

したがって $\mathbf{B}$ は ϕ 成分のみになる (右図 4)。

例 2. 直線電流の作るベクトルポテンシャル (無限長)

以上で得られた有限長の直線電流の $\mathbf{B}$ の式に対して $\ell \rightarrow \infty$ とすると

$$\begin{cases} B_r = 0 \\ B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \\ B_z = 0 \end{cases}$$

となって、見慣れた無限長の直線電流の $\mathbf{B}$ になることがわかる。

それでは、上で得られた $\mathbf{A}$ の式に対しても $\ell \rightarrow \infty$ とすれば無限長の直線電流の作るベクトルポテンシャルが求まるように思われる。ところが、実際に $\ell \rightarrow \infty$ の計算を行うと $\mathbf{A}$ は無限大に発散してしまう。

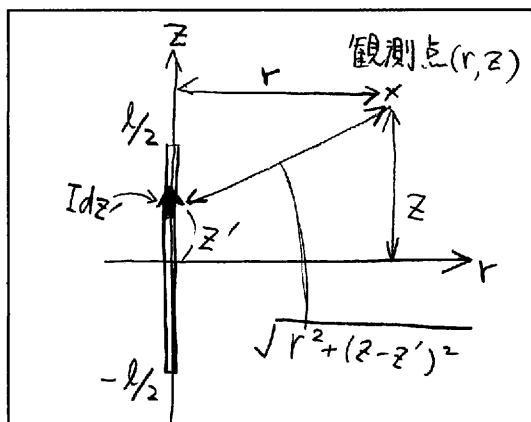


図 3

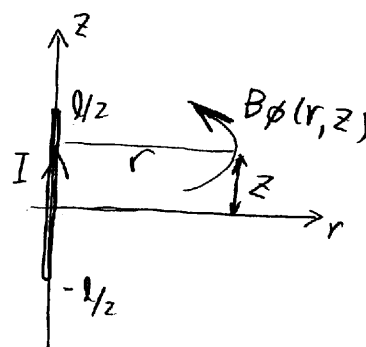


図 4

なぜだろうか。

実は、これと同じ問題は静電界のときもあつたはずである。無限長の直線電荷の作る電位は、 $V=0$ の基準点を無限遠点にとると発散してしまう。つまり無限遠点との電位差は無限大になってしまうのである。もちろん電界は有限となるが。

ベクトルポテンシャルもこれとまったく同じで、上述の計算で用いた $\mathbf{A}$ の解の式（積分）は、無限遠点の $\mathbf{A}$ を 0 とする場合の解なのである。電位の場合は、無限大では困るので、基準点を無限遠点にしないで、たとえば $r=r_0$ (r_0 はたとえば簡単に $1[\text{m}]$ としてもよい) の点に基準点を変更した。言い換えれば、無限遠点を基準にする電位 $V(r)$ の代わりに、発散しない式 $V(r)-V(r_0)$ を新たに電位とした。(前半の講義で電位を計算したとき、このことが含まれていたはずである。各自確認せよ。)

上述の計算で得られたベクトルポテンシャルにもこの考えを適用する。 $A_z(r, z)$ の代わりに $r=r_0$ を基準とした $A_z(r, z)-A_z(r_0, z)$ をベクトルポテンシャルとすれば $\ell \rightarrow \infty$ のときでも発散しない。

$$[A_z(r, z) - A_z(r_0, z)]_{\ell \rightarrow \infty} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_0}{r}$$

z 方向以外の成分はもちろん 0 のままである。これが無限長の直線電流のベクトルポテンシャルを表している。(静電界のときの電位と形式的にまったく同じ式になっている。)

以上の計算例のように $\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ の計算では、電流とベクトルポテンシャルが同じ方向なので計算の途中で方向を気にせずに機械的に行えることがわかる。

(教科書では同じ問題に対して、上で示した計算ではなく $\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ の順序で行う計算が示されている。無限長直線電流の場合は形状が簡単なので、この順序もわかりやすい。)

例 3. 微小円形電流ループのつくるベクトルポテンシャル

半径 a の円形導線を流れる電流 I のループが、このループから十分離れた位置につくるベクトルポテンシャルを計算する。

右図 5 のように円形ループの中心を原点とする球座標を設定する。観測点の座標を (r, θ, ϕ) とすると、十分遠方と仮定しているので (言い換えると、観測点から見てループは微小と仮定しているので)、 $r \gg a$ である。

観測点 (r, θ, ϕ) でのベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{A}(r, \theta, \phi) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\boldsymbol{\ell}}{R}$$

ただし、 C は電流ループであり、 R はループ上の線素片 $d\boldsymbol{\ell}$ と観測点の距離であり、図 5 を参照して、

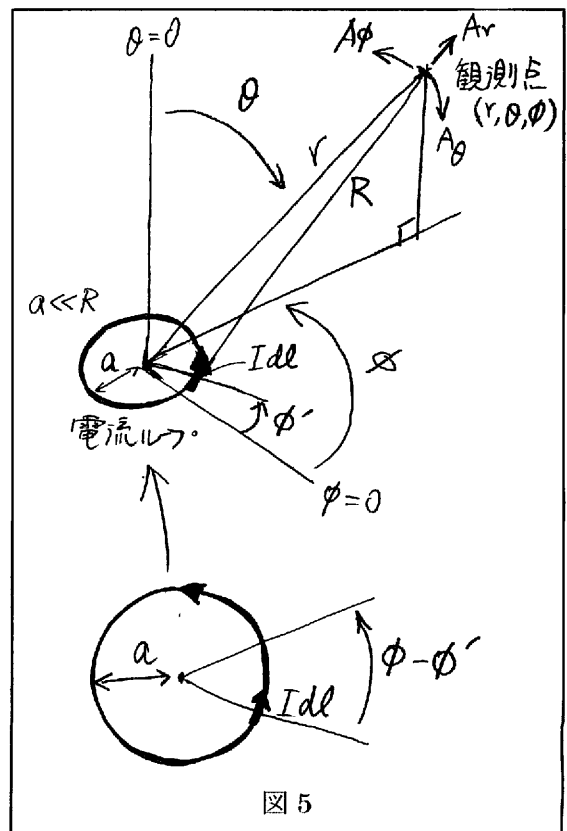


図 5

$$R = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \sin \theta \cos(\phi - \phi')}$$

となる。(図5から幾何学的に考察すれば導出できる。各自導出せよ。)

$\mathbf{A}$ には A_r, A_θ, A_ϕ の3成分あり、これらはそれぞれ線素片 $d\ell$ の3成分 $(d\ell)_r, (d\ell)_\theta, (d\ell)_\phi$ から発生するが、このうち A_r についてはループ上に $(d\ell)_r$ と $-(d\ell)_r$ が必ず対で存在するので打ち消しあって0になる。また、 A_θ については $(d\ell)_\theta$ という成分は存在しないので、やはり0になる。結局 $\mathbf{A}$ には A_ϕ の成分しかない。

図5から $(d\ell)_\phi = a \cos(\phi - \phi') d\phi'$ となるので

$$A_\phi(r, \theta, \phi) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{a \cos(\phi - \phi') d\phi'}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \sin \theta \cos(\phi - \phi')}} d\phi'$$

観測点に対して $r \gg a$ を仮定しているのので、積分の中の $1/\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \sin \theta \cos(\phi - \phi')}$ に対して

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \sin \theta \cos(\phi - \phi')}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + (a/r)^2 - 2(a/r) \sin \theta \cos(\phi - \phi')}} \simeq \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{r} \sin \theta \cos(\phi - \phi') \right)$$

最後の式は2番目の式を (a/r) についてテイラー展開して (a/r) の1次まで取り出した式である。

これを用いて積分を計算すると

$$A_\phi(r, \theta, \phi) \simeq \frac{\mu_0 I a^2}{4 r^2} \sin \theta$$

これでベクトルポテンシャルが近似的に求められた。(計算が複雑に見えるが、計算の細部のことよりも、どの方程式から出発してどのような流れで進んでいるかについて全体を見失わないように注意してほしい。)

次に $\mathbf{B} = \text{curl} \mathbf{A}$ によって $\mathbf{B}$ を求める。極座標の curl の式(教科書の付録ページ参照)に上式の A_ϕ と

$A_r = A_\theta = 0$ を代入すると

$$\begin{cases} B_r = (\text{curl} \mathbf{A})_r = \frac{\mu_0 I a^2}{2} \frac{\cos \theta}{r^3} \\ B_\theta = (\text{curl} \mathbf{A})_\theta = \frac{\mu_0 I a^2}{4} \frac{\sin \theta}{r^3} \\ B_\phi = (\text{curl} \mathbf{A})_\phi = 0 \end{cases}$$

$\mathbf{B}$ の力線は右図のようになる。

この例の電流分布の場合は、電流から直接磁束密度を計算するのは非常に大変で、ここで示した $\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ の計算が大変便利である。

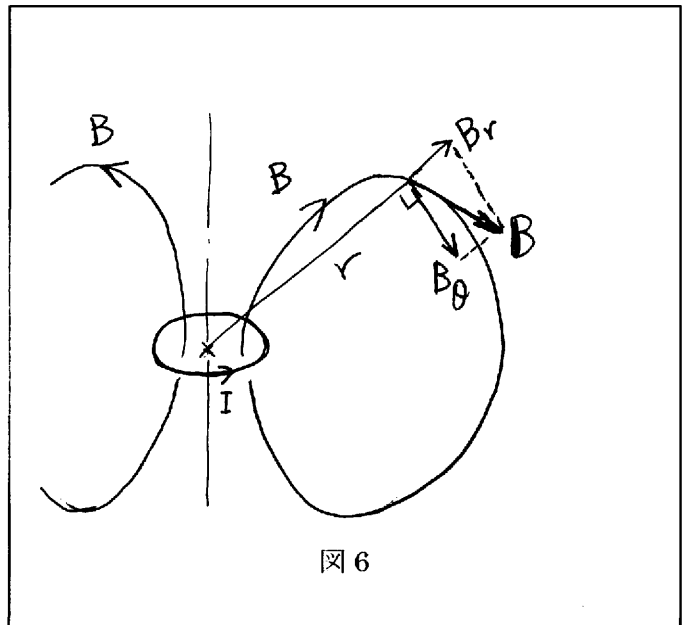
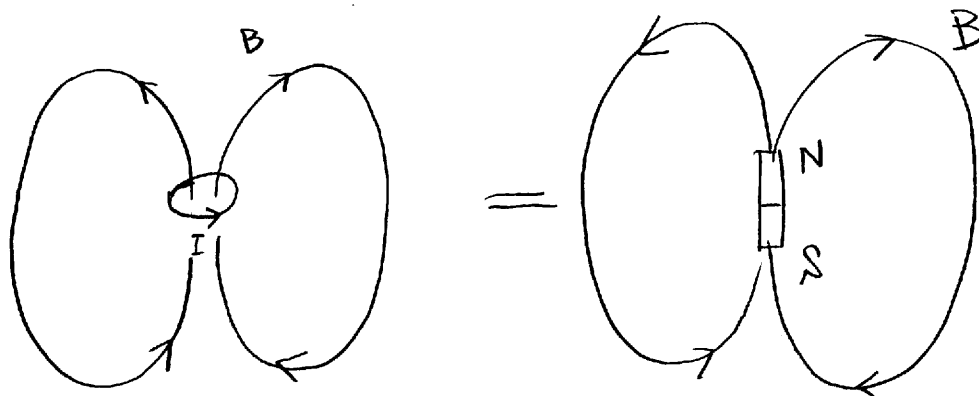


図6

磁気双極子

上で求めた微小電流ループの磁束密度は、実は微小な磁石が作る磁束密度とまったく同じ形をしている。



また、次のような静電界との密接な対応もある。
間隔 l で置かれた正負の電荷 $\pm Q$ が遠方（右図で $r \gg l$ ）につくる電界は

$$\begin{cases} E_r = \frac{Ql}{2\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^3} \\ E_\theta = \frac{Ql}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin\theta}{r^3} \\ E_\phi = 0 \end{cases}$$

（前半の講義で説明があったと思う。）

これは上で述べた磁束密度 B_r, B_θ, B_ϕ とまったく

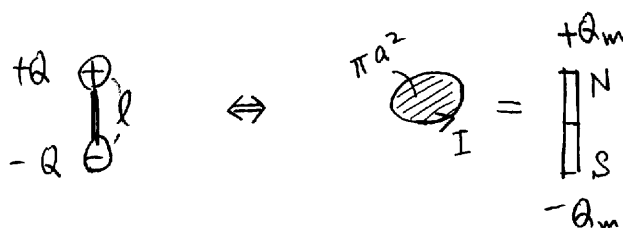
同じ関数形になっている。

静電界の場合は、この式から電気双極子モーメント

$p = Ql$ という量を定義した。同じように、磁束密度に対して磁気双極子モーメントという量を定義することができる。上に示した電界と磁束密度の式を対応させることにより

対応

$$\begin{array}{ccc} \left. \begin{array}{l} E_r \\ E_\theta \\ E_\phi \end{array} \right\} & \Leftrightarrow & \left. \begin{array}{l} B_r \\ B_\theta \\ B_\phi \end{array} \right\} \\ \epsilon_0 & \Leftrightarrow & 1/\mu_0 \\ \text{電気双極子} & & \text{磁気双極子} \\ p = Ql & \Leftrightarrow & m = I\pi a^2 \end{array}$$



すなわち、磁気双極子モーメント $m = I\pi a^2 = (\text{電流}) \times (\text{面積}) = IS$ という量が定義できる。

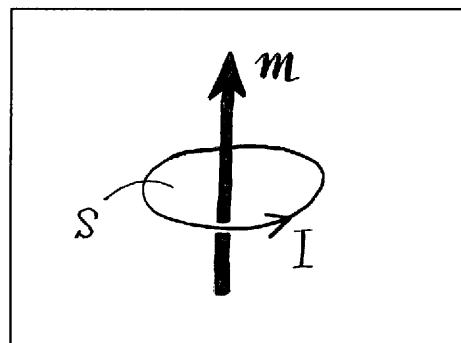
この解析では円形電流ループであったが、微小電流ループであればループの形にかかわらず、双極子モーメントを $(\text{電流}) \times (\text{面積})$ で定義し、これによって遠方の磁束密度を同じ式で表すことができる。

微小電流ループによる磁束密度が微小な磁石の作る磁束密度と同じものであることから、磁石が微小な電流ループならできていると考えることができる（このことは次回の磁性体の説明の際に利用する）。しかしここで、もし仮に磁荷というものが存在して、磁石が磁荷の対でできているという考え方をするならば、磁荷を Q_m とおくと、電界との対応から、 $Q_m \ell = I\pi a^2 = IS$ という関係が成り立つことになる。

なお、磁気双極子モーメントをベクトルで定義すると(右図)

磁気双極子モーメントベクトル m

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{大きさ} & m = IS \\ \text{方向} & \text{電流の方向を回転方向とする} \\ & \text{右ねじの進む方向} \end{array} \right.$$



ベクトルポテンシャルと仕事量の関係について (補足的。やや複雑。とばしてもよい。)

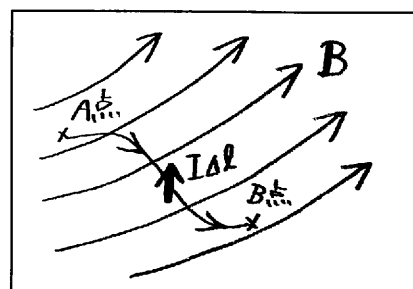
この講義ではベクトルポテンシャルを $\mathbf{B} = \text{curl} \mathbf{A}$ によって定義するところから始めた (前回)。これは、静電界と電位に対応させれば $\mathbf{E} = -\text{grad} V$ によって V を定義するところから始めたのと同じである。しかし、静電界では、前半で行ったように、A 点に対する B 点の電位 (スカラーポテンシャル) の差 V_{BA} を、A 点から B 点まで 1 クーロンの電荷を運ぶのに要する仕事量から $V_{BA} = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ によって定義することも多い。この式は、A 点から B 点までの道筋のとり方によらず一定の値になる。この定義は、 $\mathbf{E} = -\text{grad} V$ と数学的にはまったく同じなので、どちらで定義してもよい。

ベクトルポテンシャルの最初のところ(前回)で説明したように、この講義では、ベクトルポテンシャルをこのような仕事量から定義する方法をとらなかった。ベクトルポテンシャルもこのような仕事量で定義するとどうなるだろうか、という点について、ここで概略的に述べておく。

静電界と電位のときと同じようにベクトルポテンシャルを定義するならば、つぎのようにするのが妥当である。

磁束密度 $\mathbf{B}$ が存在する空間に微小な電流素片 $I\Delta\mathbf{l}$ を置き(右図)、これを A 点から B 点まで運んだとき、なされたすべての仕事量を計算する。次に、この仕事量を電流素片の大きさ $I\Delta\mathbf{l}$ で割った「単位電流素片あたりの仕事量」を計算する。ここで、電流素片はベクトルなので、置き方によって力の大きさと方向が変わり、したがってこの仕事量も置き方によって異なる。

そこで、A 点と B 点の間のベクトルポテンシャル差として、「電流素片と同じ方向の成分の大きさが、単位電流素片あたりの仕事量であるようなベクトル」と定義する。



この定義にしたがってベクトルポテンシャルを計算したとき、上で述べてきたベクトルポテンシャルと矛盾しないか、直線電流の場合について調べてみよう。

右図のように、直線電流 I_0 の近くに微小電流素片 $I\Delta\ell$ を電流が同方向になるように置くと引力がはたらく。

この電流素片を、図のように r_0 の点 A から r の点 B まで移動させる。このとき、電流素片 $I\Delta\ell$ になされる仕事量は

$$\begin{aligned} W_{BA} &= \int_{r_0}^r \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_0}^r I\Delta\ell B dr \\ &= \int_{r_0}^r I\Delta\ell \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} dr = I\Delta\ell \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0} \end{aligned}$$

となる。しかし、この系全体（直線電流と電流素片）になされた仕事量はこれだけではない。電流素片を移動させたとき、直線電流からの磁束密度が電流素片を横切るので、電流素片に起電力が発生する（詳しいことは後の回で説明

するので、ここではとりあえず話だけをする）。起電力が発生しても電流素片の電流値 I が一定に保たれるようにしてあるとすれば（具体的には、電流素片につながれた電源がいつも一定の電流を供給するようにできている、とすれば）、この起電力によって電流素片（厳密にいうと電流素片につながれた電源）はエネルギーを獲得する。詳しく計算すると（後の回で行う）、上式で電流素片になされた仕事量と、この起電力により獲得したエネルギーは全く同じになり、結局、電流素片になされた仕事量はそのまま電流素片（につながれた電源）に蓄えられたと考えてよい。

ところが、系全体になされた仕事量は、まだこれだけではない。実は電流素片も磁束密度を発生しているので、移動したとき、この磁束密度が直線電流を横切り、これによる起電力が直線導線に発生する。直線電流 I_0 を一定に保ってあるとすれば、直線電流は（厳密にいうと直線導線につながれた電流一定の電源は）エネルギーを獲得する。詳しく計算すると（これも後の回で行う）、この獲得したエネルギーは、ちょうど上式の仕事量 W_{BA} と同じになる。

結局、電流素片の移動によって、系全体（電源を除く）から差し引き W_{BA} の仕事量が失われたことになる。したがって、ベクトルポテンシャルの変化の $I\Delta\ell$ 方向 (z 方向) 成分は、上で述べた仕事量の定義にしたがうと

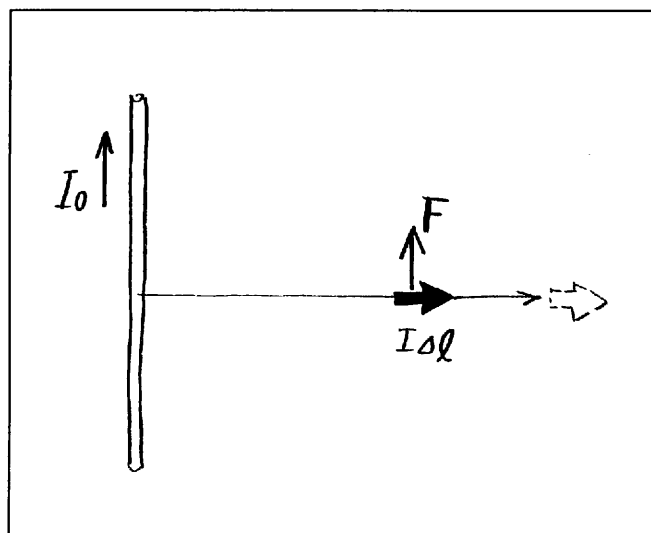
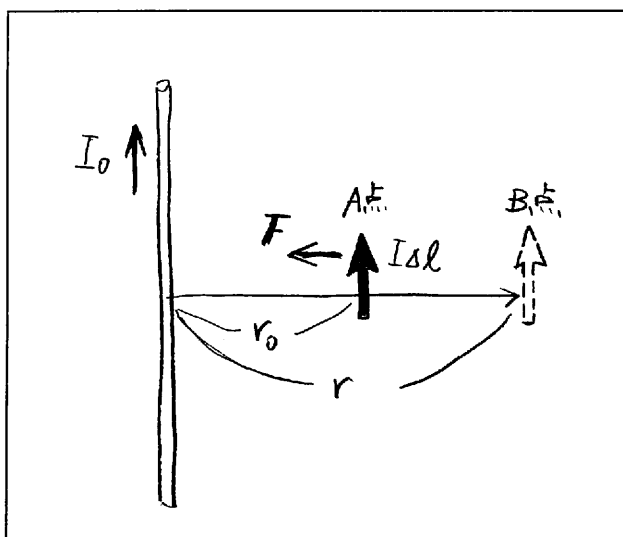
$$A_z = \frac{-W_{BA}}{I\Delta\ell} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln \frac{r_0}{r}$$

これは、前に計算した直線電流の作るベクトルポテンシャルの z 方向成分とまったく同じである。

それでは、 $I\Delta\ell$ の向きが他のときはどうだろうか。

$I\Delta\ell$ を ϕ 方向に置くと力ははたらかないので、移動しても仕事量は 0 であり、また、上で述べた起電力も発生しないので、結局、ベクトルポテンシャルの変化は 0 となり、以前の結果に等しい。

次に、 $I\Delta\ell$ を r 方向に置くと、下図のように z 方向に力がはたらく。この場合、上記の z 方向成分の場合と同じ A 点から B 点までの移動に対しては仕事量は 0 であり、また起電力も発生しないので、やはりベクトルポテンシャルの変化は 0 となり、以前の結果に等しい。しかし、 $I\Delta\ell$ を z 方向に移動させたときには仕事量は 0 ではない。この場合、上記と同じように電流素片に起電力が発生し、これによって電流素片の得た仕事量はちょうど消費される。ところが今度は直線電流には起電力は発生しないので、系全体のエネルギー変化は 0 となり、結局、ベクトルポテンシャルの変化は 0 すなわち、ベクトルポテンシャルは z 座標に依存しないという以前と同じ結果が得られる。



この直線電流の例では、以前の計算結果（すなわち、クーロンゲージをもとにした基本方程式の解から得られた結果）とちょうど一致した。しかし、その他の形状では、全く一致しないこともあり得る。それは、電流素片というものがもともと仮想的なものであり、現実的な仕事量ではないからである。現実ともしときちんと対応させるなら、微小電流ループを用いて仕事量を計算し、その中から電流素片の部分になされた仕事量を取り出してから、上のような定義を用いるのがよい。これは複雑なので、ここでは説明しなかったが、このようにすると、電流素片だけでは一致しないものでも一致するようになる。微小電流ループの場合には、力の合計を計算するときループに沿った周回積分を行うので、この周回積分の際に余計な項が含まれていても消えてしまうためである。この余計な項というのが、ちょうど、以前説明した任意性の項 $\text{grad}\phi$ なのである。

磁束 （今回の講義では使わないが後で使うのでここで説明しておく）

ループ C を貫く磁束は次式で定義される。 $\phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$

ただし S はループ C をふちとする面（右図）。 C をふちとすればどんな面でも ϕ は等しい。たとえば右図の S' でもよい。なぜならば、基本方程式のひとつ $\oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ によって、 S に下から入ってくる $\mathbf{B}$ の総量は S' から上へ出て行く $\mathbf{B}$ の総量の等しいので $\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ となるからである。

磁束をベクトルポテンシャルで表すと

$$\phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \text{curl} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

ただしストークスの定理を用いた。この式から、磁束はベクトルポテンシャルをループに沿って周回積分した量である。

磁束は後の回で電磁誘導のところで用いる。

